



Nous allons ici reprendre l'étude de la fonction carré (*The square function*) vue dans le chapitre **Fonctions et variations**, puis étudier la fonction racine carrée (*the square root function*), la fonction inverse (*the reciprocal function*) et la fonction cube (*the cube function*).

I. La fonction carré (*The square function*)

Définition 1

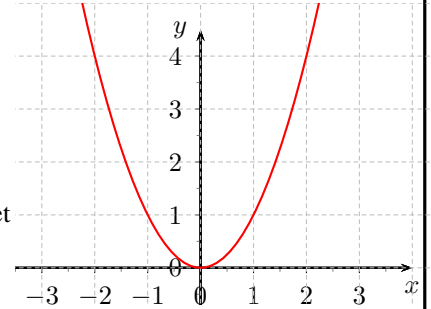
La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

Sa courbe représentative est une parabole (*a parabola*).

Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R} et elle est à valeurs dans \mathbb{R}_+ (*the codomain or set of destination*).

Remarque : sa courbe présente une tangente horizontale en 0.



Propriété 1

1. Pour tout réel x on a : $x^2 \geq 0$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$$

2. La fonction carré est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$

(Arrows indicate a decrease from $+\infty$ to 0 and an increase from 0 to $+\infty$)



Preuve

Les deux premières assertions sont évidentes, étudions donc les variations de f .

1. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soit a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$ et tels que $0 \leq a \leq b$. Étudions le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^2 - a^2 \\ &= (b - a)(b + a) \end{aligned}$$

Or :

- $(b - a) \geq 0$ car on a supposé $b \geq a$;
- $(b + a) \geq 0$ car on a supposé que a et b sont positifs ou nuls .
- Donc le produit est positif et donc on a montré que :

$$0 \leq a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

Donc la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ .

2. Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

Puisque la fonction carré est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. De ce fait, puisqu'elle est croissante sur \mathbb{R}_+ , elle est décroissante sur \mathbb{R}_- .

II. La fonction racine carrée (*The square root function*)

II.1 Définitions et premières propriétés de la racine carrée

Pour des exemples et compléments consultez la page sur les racines carrées (3e et seconde) : www.math93.com

Définition 2 (racine carrée (*square root*))

- Soit a un nombre positif ou nul.

La **racine carrée** de a est l'unique nombre positif dont le carré vaut a .

On note ce nombre : \sqrt{a}

On a donc d'après la définition :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \geq 0$$



Exemple

On a donc :

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{car} \quad 5^2 = 25 \quad \text{et} \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{car} \quad 6^2 = 36.$$

Pour les valeurs qui ne sont pas des carrés, il faut utiliser la calculatrice. Deux résultats sont à connaître (au millième) :

$$\sqrt{2} \approx 1,414 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \approx 1,732$$

Propriété 2

1. Pour tous nombres réels positifs a et b on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

2. Pour tous nombres réels positifs a et $b \neq 0$ on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$



Preuve

Les propriétés 1 et 2 s'obtiennent par comparaisons des carrés des deux membres des égalités. Comparaison légitimes car ces membres sont tous positifs.

Attention, il n'y a pas de formule pour l'addition.



Exemple

$$D = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$D = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$E = 2\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{20}{5}}$$

$$= 2\sqrt{4}$$

$$E = \boxed{4}$$

$$A = \sqrt{32}$$

$$= \sqrt{16 \times 2}$$

$$= \sqrt{16} \times \sqrt{2}$$

$$A = \boxed{4\sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{150}$$

$$= \sqrt{25 \times 6}$$

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{6}$$

$$B = \boxed{5\sqrt{6}}$$

$$C = 3\sqrt{8} - \sqrt{200}$$

$$= 3\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{100 \times 2}$$

$$= 3 \times 2 \times \sqrt{2} - 10 \times \sqrt{2}$$

$$C = \boxed{-4\sqrt{2}}$$

II.2 Suppression des radicaux au dénominateur

Pour supprimer les radicaux au dénominateur d'une expression fractionnaire, on utilise, soit la propriété 3a, soit l'expression conjuguée de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ qui est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Rappelons l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Propriété 3

- **Propriété a :** $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1 \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}}$

- **Propriété b :**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}$$



Exemple

$$E = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$E = \frac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$E = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$F = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$$

$$F = \frac{3 \times (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2) \times (\sqrt{5} + 2)}$$

$$F = \frac{3 \times (\sqrt{5} + 2)}{5 - 4}$$

$$F = \boxed{3 \times (\sqrt{5} + 2)}$$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$G = \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

$$G = \frac{3 - \sqrt{15}}{3 - 5} = \frac{3 - \sqrt{15}}{-2}$$

$$G = \boxed{\frac{-3 + \sqrt{15}}{2}}$$

II.3 La fonction racine carrée : Variations et courbe

Définition 3

La fonction racine carrée est la fonction qui, à tout réel positif x associe \sqrt{x} .
 Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R}_+ et elle est à valeurs dans \mathbb{R}_+ (*the codomain or set of destination*).

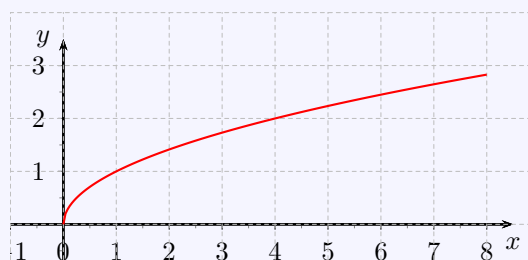
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

Propriété 4

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Remarque : sa courbe présente une tangente verticale en 0.
 On verra en première que cette fonction est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

x	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$		$+\infty$
	0	



Preuve

Soit f la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

$$f(b) - f(a) = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{1}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ qui est non nul puisque $a < b$, donc a et b ne peuvent être tous les deux nuls.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{b} + \sqrt{a})}{1 \times (\sqrt{b} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{b - a}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} \end{aligned}$$

Or on a puisque $a < b$:

$$\begin{cases} b - a > 0 \\ (\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0 \end{cases} \implies f(b) - f(a) > 0$$

On vient donc de montrer que si $a < b$ avec a et b deux réels positifs, alors $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

II.4 Complément : Racine carrée d'un carré

Propriété 5

Pour tout nombre réel x , la racine carrée de x^2 est égale à la valeur absolue de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$$

Application : résolution de l'équation $x^2 = a$.

- Si $a > 0$. Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$ l'équation n'admet pas de solution réelle et si $a = 0$ seul $x = 0$ est solution



Exemple

1. On a :

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

2. Équation :

$$\begin{aligned} x^2 = 5 &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{5} \\ &\iff |x| = \sqrt{5} \\ &\iff \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$



Autre méthode

$$\begin{aligned} x^2 = 5 &\iff x^2 - 5 = 0 \\ &\iff x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \\ &\iff (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x - \sqrt{5} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{5} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Équation :

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 = 2 &\iff \sqrt{(2x + 1)^2} = \sqrt{2} \\ &\iff |2x + 1| = \sqrt{2} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 1 = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Autre méthode

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 = 2 &\iff (2x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \\ &\iff (2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2}) = 0 \\ &\iff \dots \end{aligned}$$

III. La fonction inverse (*The reciprocal function*)



Fonction réciproque et fonction inverse : Attention!

- La fonction bijection réciproque (ou fonction réciproque ou réciproque) se dit en anglais *the inverse function of*. Par exemple la fonction réciproque du sinus est la fonction arcsin ou \sin^{-1}
- La fonction inverse c'est à dire la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ se nomme en anglais *the reciprocal function*.

Définition 4

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul x , associe son inverse $\frac{1}{x}$.

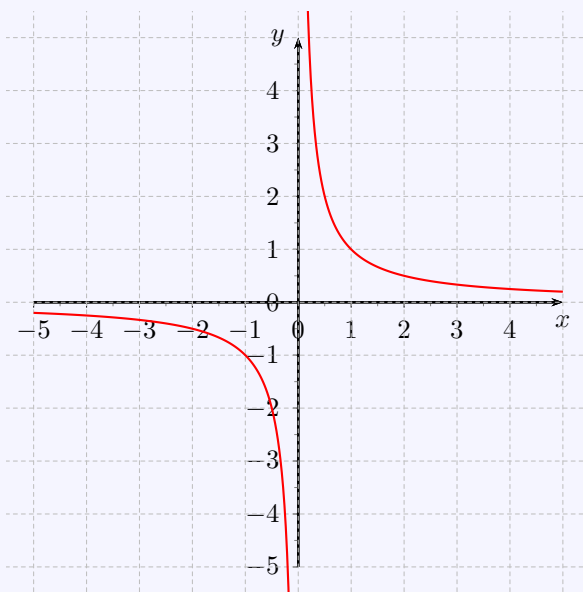
Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R}^* et elle est à valeurs dans \mathbb{R}^* (*the codomain or set of destination*).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

Propriété 6

1. La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* .
2. La fonction inverse n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* .
3. La fonction inverse est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Sa courbe est une hyperbole (*hyperbola*).



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0
		$-\infty$	



Preuve

Soit f la fonction inverse définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

1. Variations de f sur \mathbb{R}_+^* .

Soit a et b deux réels positifs non nuls tels que $a < b$. On va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ &= \frac{a - b}{ab} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{cases} a - b < 0 & \text{car } a < b \\ ab > 0 & \text{car } a > 0 \text{ et } b > 0 \end{cases} \implies f(b) - f(a) < 0$$

On vient donc de montrer que si $a < b$ avec a et b deux réels positifs non nul, alors $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

2. Variations de f sur \mathbb{R}_-^* .

Soit a et b deux réels négatifs non nuls tels que $a < b$. On va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ &= \frac{a - b}{ab} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{cases} a - b < 0 & \text{car } a < b \\ ab > 0 & \text{car } a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases} \implies f(b) - f(a) < 0$$

On vient donc de montrer que si $a < b$ avec a et b deux réels négatifs non nul, alors $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* .

3. Variations de f sur \mathbb{R}^* .

3. a. On a d'une part avec

$$a = -2 < b = 3 \implies f(a) = -\frac{1}{2} < f(b) = \frac{1}{3}$$

3. b. On a d'autre part avec

$$a = 2 < b = 3 \implies f(a) = \frac{1}{2} > f(b) = \frac{1}{3}$$

3. c. La fonction n'est donc pas monotone sur \mathbb{R}^* .

4. Parité.

- Pour tout réel x de \mathbb{R}^* on a $(-x) \in \mathbb{R}^*$ donc l'intervalle est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout réel x de \mathbb{R}^* on a ;

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

Donc f est bien impaire et sa courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Remarque

Il aurait été plus astucieux de d'abord étudier la parité de la fonction inverse. En effet, après avoir montré qu'elle était décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on aurait directement conclu que par symétrie par rapport à l'origine du repère, elle était aussi décroissante sur \mathbb{R}_-^* .

IV. La fonction cube (*The cube function*)

Définition 5

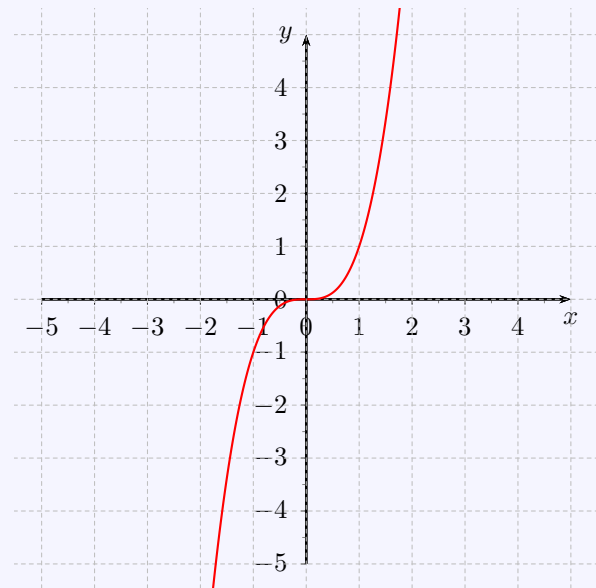
La fonction cube est la fonction qui, à tout réel non nul x , associe son cube x^3 .
 Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R} et elle est à valeurs dans \mathbb{R} (*the codomain or set of destination*).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$$

Propriété 7

1. La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. La fonction cube est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque : sa courbe présente une tangente horizontale en 0 qu'elle traverse, cela se nomme un point d'inflexion qui marque un changement de convexité.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction cube $x \mapsto x^3$	$-\infty$	0	$+\infty$



Preuve

Soit f la fonction cube définie sur \mathbb{R} par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^3 \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tous réels a et b on a : $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\begin{aligned} (b - a)(a^2 + ab + b^2) &= ba^2 + ab^2 + b^3 - a^3 - a^2b - ab^2 \\ &= b^3 - a^3 + \underbrace{(-a^2b + ba^2)}_0 + \underbrace{(ab^2 - ab^2)}_0 \\ &= \underline{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

2. Variations de f sur \mathbb{R}^+ .

Soit a et b deux réels positif tels que $0 \leq a < b$. On va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^3 - a^3 \\ &= (b - a)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{cases} (b - a) > 0 & \text{car } a < b \\ a^2 + ab + b^2 > 0 & \text{car } a \geq 0 \text{ et } b > 0 \end{cases} \implies f(b) - f(a) > 0$$

On vient donc de montrer que si $a < b$ avec a et b deux réels positifs , alors $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

3. Variations de f sur \mathbb{R}_- .

Soit a et b deux réels négatifs tels que $a < b \leq 0$. On va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^3 - a^3 \\ &= (b - a)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{cases} (b - a) > 0 & \text{car } a < b \\ a^2 > 0 \text{ et } b^2 \geq 0 \\ ab \geq 0 & \text{car } a \text{ et } b \text{ sont de même signe } a < 0 \text{ et } b \leq 0 \end{cases} \implies f(b) - f(a) > 0$$

On vient donc de montrer que si $a < b$ avec a et b deux réels positifs , alors $f(a) < f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_- .

4. Que se passe-t-il dans le cas où a et b sont de signes contraires ?

On peut par exemple considérer que : $a < 0$ et $b > 0$.

Dans ce cas :

- Puisque f croissante sur \mathbb{R}_- on a :

$$a < 0 \implies f(a) < f(0) = 0$$

- Puisque f croissante sur \mathbb{R}_+ on a :

$$b > 0 \implies f(b) > f(0) = 0$$

- On vient donc de montrer que l'on a bien :

$$a < 0 < b \implies f(a) < f(b)$$

5. Conclusion :

On vient de montrer que pour tous réels a et b tels que $a < b$ alors :

$$a < b \implies f(a) < f(b)$$

Donc f est bien croissante sur \mathbb{R} .

6. Parité.

- Pour tout réel x de \mathbb{R} on a $(-x) \in \mathbb{R}$ donc l'intervalle est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout réel x de \mathbb{R} on a ;

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x)^2 \times (-x) = x^2 \times (-x) = -x^3 = -f(x)$$

Donc f est bien impaire et sa courbe symétrique par rapport à l'origine.

- On pouvait mieux faire.

**Remarque**

Il aurait été plus astucieux de d'abord étudier la parité de la fonction cube. En effet, après avoir montré qu'elle était croissante sur \mathbb{R}_+ , on aurait directement conclu que par symétrie par rapport à l'origine du repère, elle était aussi croissante sur \mathbb{R}_- .

Propriété 8 (Racine cubique (Admis))

Pour tout réel a , l'équation $x^3 = a$ admet exactement une solution, que l'on appelle racine cubique de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$.

$$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}$$

**Exemple**

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.
2. $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$.
3. On peut en déduire un encadrement de $\sqrt[3]{20}$ car la fonction cube est croissante sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{8} = 2 \\ \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases} \implies 2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

V. Positions relatives de plusieurs courbes de référence (*relative position of curves*)

Question : Comment, sans calculatrice, peut-on comparer $0,998^2$, $0,998^3$, $0,998$ et $\sqrt{0,998}$?

Propriété 9

Soit x un réel positif ou nul.

1. Si $0 < x < 1$, alors

$$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$$

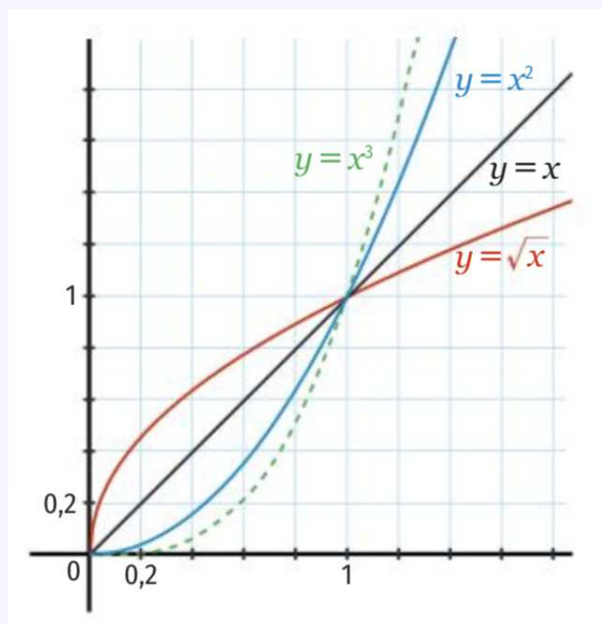
2. Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x^3 = x^2 = x = \sqrt{x}$.

3. Si $x > 1$, alors

$$x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$$

4. Remarque : (Admis)

Si x est positif, les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).





Preuve

1. Position relative des courbes des fonctions cube \mathcal{C}_{cube} et carré $\mathcal{C}_{carré}$.

Soit x réel positif :

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

Donc puisque pour tout réel $x \geq 0$, on a $x^2 \geq 0$, l'expression $x^3 - x^2$ est du signe de $x - 1$ qui est trivial :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $(x - 1)$		-	+
Signe de $x^3 - x^2$	0	$x^3 - x^2 < 0$	$x^3 - x^2 > 0$
Position relative	0	\mathcal{C}_{cube} au dessous de $\mathcal{C}_{carré}$	\mathcal{C}_{cube} au dessus de $\mathcal{C}_{carré}$

2. Position relative des courbes de la fonction carré $\mathcal{C}_{carré}$ et de \mathcal{C}_{Id} , celle de la fonction définie par $f(x) = x$.

Soit x réel positif :

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

Donc puisque $x \geq 0$, l'expression $x^2 - x$ est du signe de $x - 1$ qui est trivial :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $(x - 1)$		-	+
Signe de $x^2 - x$	0	$x^2 < x$	$x^2 > x$
Position relative	0	$\mathcal{C}_{carré}$ au dessous de \mathcal{C}_{Id}	$\mathcal{C}_{carré}$ au dessus de \mathcal{C}_{Id}

3. Position relative des courbes de la fonction racine carrée \mathcal{C}_{racine} et de \mathcal{C}_{Id} , celle de la fonction définie par $f(x) = x$.

Soit x réel positif :

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$$

Donc puisque $\sqrt{x} \geq 0$, l'expression $x - \sqrt{x}$ est du signe de $(\sqrt{x} - 1)$.

Or on a démontré que la fonction racine carrée était croissante sur \mathbb{R}_+ et puisque $\sqrt{1} = 1$ on a :

x	0	1	$+\infty$
Variations de f	0	1	$+\infty$

Soit

x	0	1	$+\infty$
Signe de $(\sqrt{x} - 1)$		-	+
Signe de $x - \sqrt{x}$	0	$x < \sqrt{x}$	$x > \sqrt{x}$
Position relative	0	\mathcal{C}_{Id} au dessous de \mathcal{C}_{racine}	\mathcal{C}_{Id} au dessus de \mathcal{C}_{racine}

4. Conclusion : On a bien démontré le théorème.

x	0	1	$+\infty$
	0	$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$	$x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$