Math93.com

Géométrie Plane

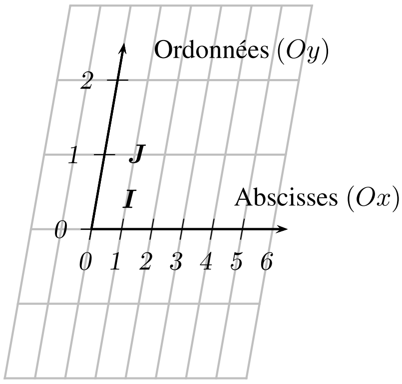
Seconde

I. Coordonnées dans le plan

Définition 1 (Repère du plan)

Définir un repère du plan, c'est choisir trois points **non alignés**, dans un ordre défini : O, I, J.
Dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ on a :

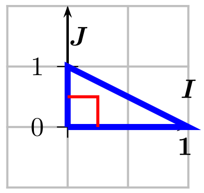
- le point O est **l'origine du repère** ;
- la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et la distance OI représente l'unité sur cet axe ;
- la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et la distance OJ représente l'unité sur cet axe.

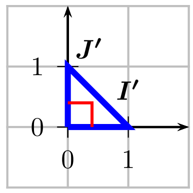


Définition 2

On considère trois points **non alignés** : O, I, J, et trois autres **non alignés** : O', I', J'.

- si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est dit **orthogonal** ;
- si le triangle $O'I'J'$ est rectangle et isocèle en O, le repère $(O'\ ;\ I'\ ;\ J')$ est dit **orthonormé**.

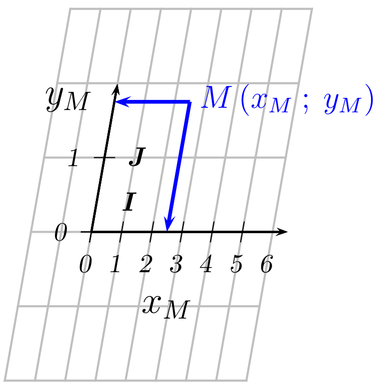




Définition 3 (Coordonnées)

Dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ du plan on considère un point M.

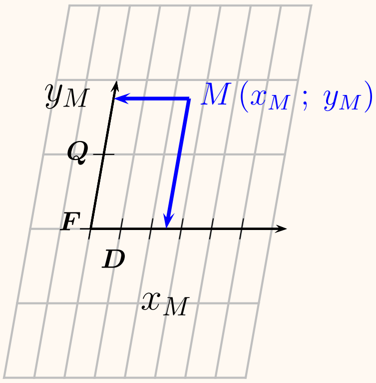
- En traçant la parallèle à l'axe (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'**abscisse** du point M que l'on note x_M.
- En traçant la parallèle à l'axe (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'**ordonnée** du point M que l'on note y_M.
- Le couple de réels $(x_M\ ;\ y_M)$ désigne les coordonnées du point M dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.



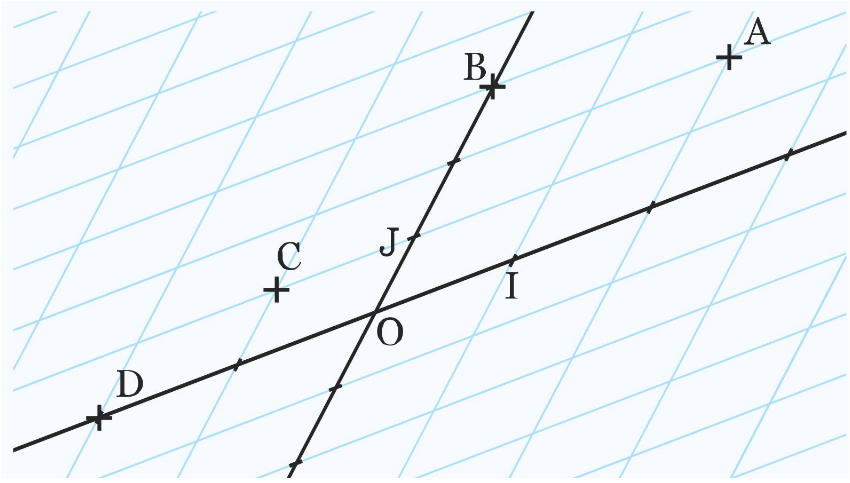
Exemple

Dans le repère $(F\ ;\ D\ ;\ Q)$ par exemple les coordonnées des trois points du repère sont implicitement donnée par leur ordre :

- Le premier point F du repère $\left(\boxed{F}\ ;\ D\ ;\ Q\right)$ est de coordonnées : $F\,(0\ ;\ 0)$.
- Le deuxième point D du repère $\left(F\ ;\ \boxed{D}\ ;\ Q\right)$ est de coordonnées : $D\,(1\ ;\ 0)$.
- Le troisième point D du repère $\left(F\ ;\ D\ ;\ \boxed{Q}\right)$ D est de coordonnées : $Q\,(0\ ;\ 1)$.



Exercice 1



1. Le repère $(\mathrm{O}\ ;\mathrm{I}\ ,\mathrm{J})$ est-il orthonormé ? orthogonal ?

Le repère n'est ni orthonormé, ni orthogonal car les droites (OI) et (OJ) ne sont pas perpendiculaires.

2. Lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(\mathrm{O}\ ;\mathrm{I}\ ,\mathrm{J})$.

Dans le repère $(O\,;I,J)$, on a : $A(2;2)$; $B(0;3)$; $C(-1;1)$ et $D(-2;0)$.

3. Déterminer les coordonnées de tous les points dans le repère $(\mathrm{O}\ ;\mathrm{I}\ ,\mathrm{B})$.

Dans le repère $(O\,;I,B)$, on a : $A(2;\frac{2}{3})$; $B(0;1)$; $C(-1;\frac{1}{3})$; $D(-2;0)$; $I(1;0)$ et $J(0;\frac{1}{3})$.

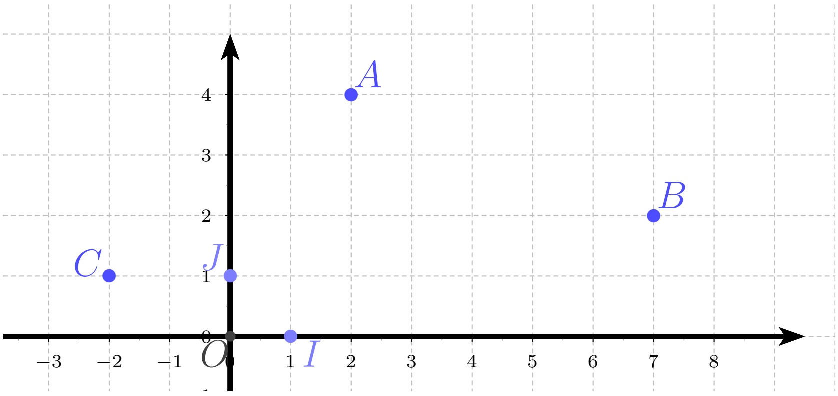
4. Déterminer les éventuels points qui possèdent les mêmes coordonnées dans ces deux repères.

Les points D et I ont les mêmes coordonnées dans les deux repères car ils sont sur l'axe des abscisses et que l'unité de longueur est la même sur cet axe pour les deux repères.

II. Coordonnées du milieu d'un segment

II.1 Activité

On considère dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les point A, B et C.



Construire les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ puis lire leurs coordonnées.
Conjecturer un moyen d'obtenir les coordonnées du milieu uniquement à partir des coordonnées des extrémités du segment. . . . .

II.2 Bilan

Proposition 1 (Milieu d'un segment)

On considère dans le plan un repère quelconque $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ et les points $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$ où x_A, x_B, y_A et y_B, sont des réels.
Le **milieu** I du segment $[AB]$ a pour coordonnées les **moyennes** de celles des points A et B .

$$\boxed{I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)}$$

Une preuve en vidéo : https://youtu.be/mmzqAcPQeZQ

Exemple

On considère dans le plan un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points (on les écrit l'un sous l'autre, c'est plus simple) $\begin{cases} A\Big(-5\ ;\ +2\Big) \\ B\Big(+3\ ;\ -7\Big) \end{cases}$

Alors on a le **milieu** I du segment $[AB]$ a pour coordonnées les **moyennes** de celles des points A et B c'est à dire :

$$\begin{cases} A\Big(-5\ ;\ +2\Big) \\ B\Big(+3\ ;\ -7\Big) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_I &= \dfrac{-5+3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ \\ y_I &= \dfrac{2-7}{2} = \dfrac{-5}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{I\Big(-1\ ;\ \frac{-5}{2}\Big)}$$

III. Calcul de distances dans un repère

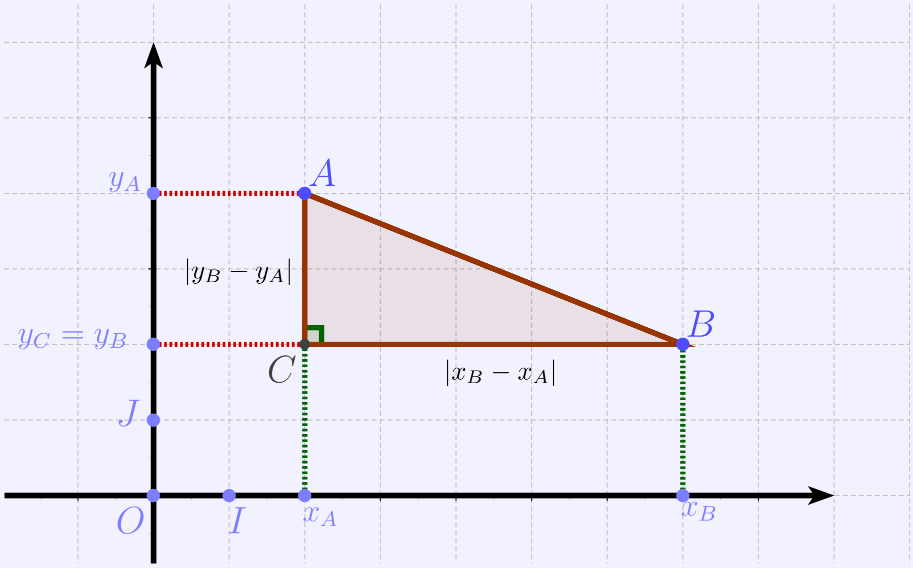
III.1 Unité de longueur

Le calcul de longueurs va dépendre **des unités de longueur** choisies sur les axes du repère. On se placera toujours dans **un repère orthonormé (r.o.n.)** et on devra préciser l'unité du repère, c'est à dire la distance $OI = OJ$ = **1 unité**.

III.2 Activité

On considère dans R.O.N $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les point $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$.
On va considérer ici que : $x_A < x_B$.

Correction



Le triangle ABC est rectangle en C puisque le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère orthonormé.
On rappelle la définition suivante :

Définition 4

Soit a et b deux réels d'images respectives $A(a)$ et $B(b)$ sur une droite graduée.
La distance entre a et b est la distance $AB = |b - a|$.

De ce fait on sait que :

$$AC = |y_C - y_A| = |y_B - y_A| \ \text{ et } \ CB = |x_B - x_A|$$

D'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} AB^2 &= CB^2 + AC^2 \\ &= |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \end{aligned}$$

Or ici puisque les termes sont élevés au carré, on peut s'abstenir de valeurs absolues $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

et donc, en unités de longueurs on obtient :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ u.l.}}$$

III.3 Calcul de distances dans un repère orthonormé (r.o.n.).

Proposition 2

On considère dans le plan un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ et les points $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$ où x_A, x_B, y_A et y_B, sont des réels.
La distance entre les points A et B, exprimée dans l'**unité de longueur commune aux deux axes** est :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemple

On considère dans le plan un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points (on les écrit l'un sous l'autre, c'est plus simple)

$$\begin{cases} A\Big(-4\ ;\ +2\Big) \\ B\Big(+3\ ;\ -1\Big) \end{cases}$$

1. Calculer cette distance en utilisant la formule du cours.
2. Placer les points dans un RON d'unité 1cm puis mesurer à la règle la distance AB. Comparer avec le résultat obtenu par le calcul.
3. Maintenant placer les points dans un autre RON d'unité 2cm puis mesurer à la règle la distance AB. Que remarque-t-on ?
4. Maintenant placer les points dans un autre RON d'unité 0,5cm puis mesurer à la règle la distance AB. Que remarque-t-on ?

Correction

On est dans un RON, donc on peut appliquer la formule du cours :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\Big(3-(-4)\Big)^2 + \Big(-1-2\Big)^2} \\ AB &= \sqrt{(7)^2 + (-3)^2} \\ AB &= \sqrt{49+9} \\ AB &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{AB = \sqrt{58}\ \text{ unités} \approx 7,6 \text{ u.l.}}$$

1. Si on construit les points dans un RON d'unité 1cm, on doit obtenir
$$AB = \sqrt{58}\ \text{ unités} \approx 7,6 \text{ cm}$$
2. Si on construit les points dans un RON d'unité 2cm, on doit obtenir en mesurant avec la règle
$$AB = \sqrt{58}\ \text{ unités} = \sqrt{58} \times 2cm \approx 15,2 \text{ cm}$$
3. Si on construit les points dans un RON d'unité 0,5cm, on doit obtenir en mesurant avec la règle
$$AB = \sqrt{58}\ \text{ unités} = \sqrt{58} \times 0,5cm \approx 3,8 \text{ cm}$$

IV. Applications

On se place dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

IV.1 Problèmes d'alignement

Propriété 1

Dans le plan, les points A, B et C sont alignés (dans cet ordre) **si et seulement si** $AB + BC = AC$.

Exemple

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(3\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ -2)$ et $C(-1\ ;\ -7)$.
Ces trois points sont-ils alignés ? *Link geogebra*

Correction

On est dans un RON, donc on peut appliquer la formule du cours :

$$\begin{cases} A(3\ ;\ 3) \\ B(1\ ;\ -2) \\ C(-1\ ;\ -7) \end{cases} \implies \begin{cases} AB = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{29} \text{ u.l.} \\ AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{116} \text{ u.l.} \\ BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{29} \text{ u.l.} \end{cases}$$

Donc les points sont ici alignés, si et seulement si $AB + BC = AC$, or on a :

$$\begin{aligned} AB + BC &= \sqrt{29} + \sqrt{29} \\ &= 2\sqrt{29} = \sqrt{4} \times \sqrt{29} \\ &= \sqrt{4 \times 29} \\ &= \sqrt{116} \\ AB + BC &= AC \end{aligned}$$

De ce fait les points A, B C sont aligné dans cet ordre et B est même le milieu du segment [AC] puisque $AB = BC$ avec $B \in [AC]$.

IV.2 Pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

On rappelle les caractérisations du parallélogramme :

Proposition 3

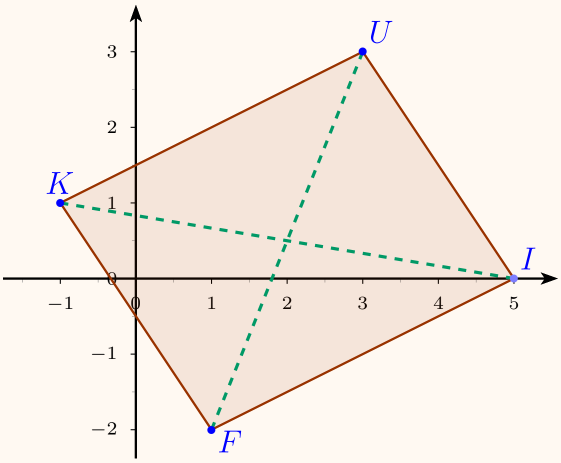
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

La méthode la plus simple est donc, connaissant les coordonnées des quatre sommets, de trouver les coordonnées des milieux des diagonales et de montrer qu'ils sont identiques.

Exemple

On considère dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points $U(3\ ;\ 3)$, $F(1\ ;\ -2)$, $K(-1\ ;\ 1)$, $I(5\ ;\ 0)$.
Montrer que le quadrilatère UIFK est un parallélogramme.

Il faut faire un dessin.



On calcule les coordonnées des milieux des segments $[UF]$ et $[KI]$:

- 1ère rédaction (en nommant le milieu) : On a en notant M_1 le milieu du segment $[UF]$:

$$\left\{\begin{array}{l} U\left(3\ ;\ 3\right) \\ F\left(1\ ;\ -2\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_{M_1} & = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ y_{M_1} & = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow M_1\left(2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

  Donc le milieu de $[UF]$ est de coordonnées $(2;0,5)$;

- Autre rédaction possible (sans nommer le milieu) : Le milieu du segment $[KI]$ est de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} K\left(-1\ ;\ 1\right) \\ I\left(5\ ;\ 0\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{-1+5}{2}\ ;\ \frac{1+0}{2}\right) \text{ soit } \left(2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

  Donc ce milieu de $[KI]$ est de coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 5)$.

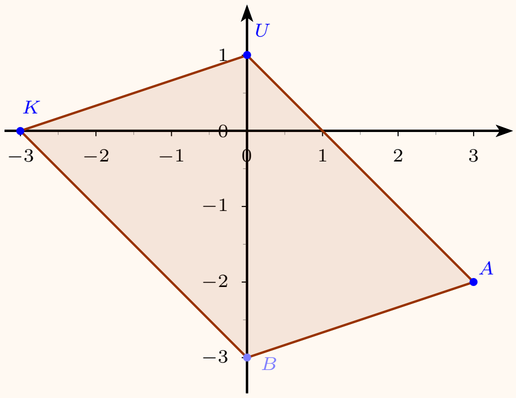
Le quadrilatère $UIFK$ a donc ses diagonales $[UF]$ et $[KI]$ qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme d'après la propriété 3.

Proposition 4

Si un quadrilatère a ses côtés opposés qui ont la même mesure, alors c'est un parallélogramme.

Exemple

On considère les points $A(3\ ;\ -2), B(0\ ;\ -3), K(-3\ ;\ 0), U(0\ ;\ 1)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
Le quadrilatère $ABKU$ est-il un parallélogramme ?



On est dans un RON donc le calcul des distances avec les formules usuelles est légitime.

$$\left\{\begin{array}{l} A(3\ ;\ -2) \\ B(0\ ;\ -3) \\ K(-3\ ;\ 0) \\ U(0\ ;\ 1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = \sqrt{(0-3)^2+(-3+2)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \\ UK = \sqrt{(-3-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \\ UA = \sqrt{(3-0)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} \\ KB = \sqrt{(0+3)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} \end{array}\right.$$

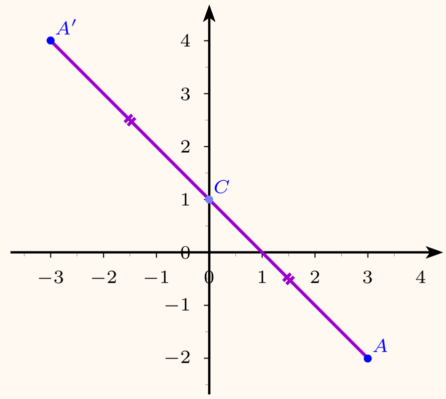
- $AB = UK = \sqrt{10}$ u.l.
- $UA = KB = \sqrt{18}$ u.l.

Le quadrilatère $ABKU$ a ses côtés opposés qui ont la même mesure, c'est donc un parallélogramme (propriété 4).

IV.3 Pour calculer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie centrale

Exemple

Soit dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points A et C de coordonnées $A(3\ ;\ -2), C(0\ ;\ 1)$.
Déterminer les coordonnées du point A', image du point A par la symétrie de centre C.



Le point A' est l'image du point A par la symétrie de centre C signifie que C est le milieu du segment $[AA']$.

$$C = mil[AA'] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0\,(\times 2) = \dfrac{3 + x_{A'}}{2}\,(\times 2) \\ 1\,(\times 2) = \dfrac{-2 + y_{A'}}{2}\,(\times 2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + x_{A'} \\ 2 = -2 + y_{A'} \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{A'(-3; 4)}$$

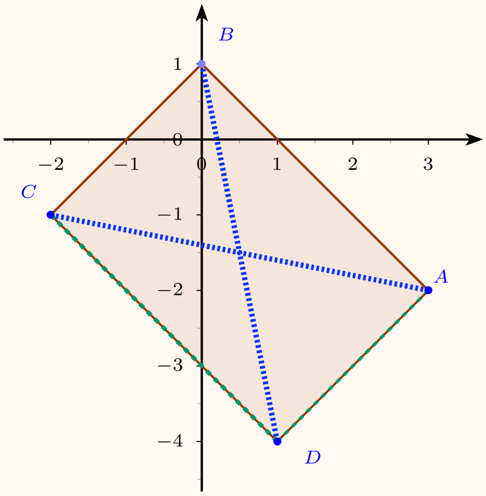
IV.4 Pour calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme

D'après la propriété 3, il suffit de remarquer que les coordonnées du point D vérifient l'égalité des coordonnées des milieux des diagonales.

Exemple

On considère dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points $A(3\ ;\ -2)$, $B(0\ ;\ 1)$ et $C(-2\ ;\ -1)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Attention Danger !
La principale source d'erreurs ici est l'ordre des points. Il faut impérativement faire un dessin même si ce n'est pas demandé et construire le parallélogramme en respectant l'ordre des points.
Astuce *: faire un dessin au brouillon et repérer les côtés parallèles puis les tracer sur la figure de l'exercice.*



On écrit que $ABCD$ parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu soit ici avec :

$$\begin{cases} A(3\ ;\ -2) \\ B(0\ ;\ 1) \\ C(-2\ ;\ -1) \end{cases} \Longrightarrow \qquad mil[AC] = mil[BD] \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} & = & \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} & = & \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-2}{2}\,(\times 2) & = & \dfrac{0 + x_D}{2}\,(\times 2) \\ \dfrac{-2-1}{2}\,(\times 2) & = & \dfrac{1 + y_D}{2}\,(\times 2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 & = & 0 + x_D \\ -3 & = & 1 + y_D \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 & = & x_D \\ -4 & = & y_D \end{cases}$$

Le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est donc de coordonnées : $\boxed{D(1; -4)}$

V. Projection orthogonale (*orthogonal projection*)

V.1 Activité : Minimiser des distances

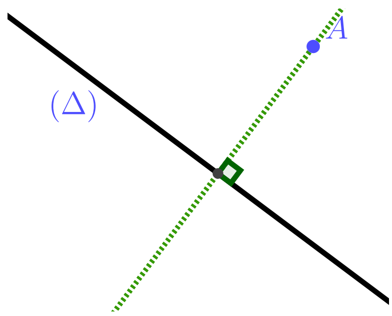
On se donne une droite (d) et un point A non situé sur cette droite. Où se trouve le (ou les points) de (d) le plus près de A ?

V.2 Projection orthogonale et distance d'un point à une droite

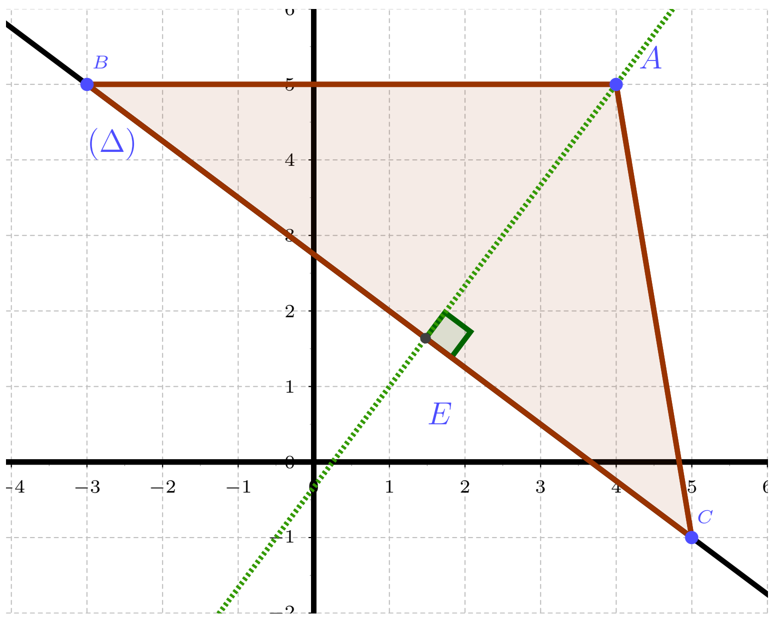
Définition 5

Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite (Δ) est :

- le point d'intersection de (Δ) et de la perpendiculaire à (Δ) passant par A.
- le point A lui-même si A appartient à (Δ).



V.3 Lien avec la hauteur (*altitude*) et le pied de la hauteur (*the foot of the altitude*)



Remarque

Dans le triangle ABC suivant :

- E est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
- Donc E est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

V.4 Distance d'un point à une droite

Propriété 2

On se donne une droite (D) et un point A non situé sur cette droite. On appelle A' le projeté orthogonal de A sur (d).
Alors, pour tout point M de (d) distinct de A', $AA' < AM$.
Définition *: on appelle distance du point A à la droite (D) la distance AM qui est donc la plus petite distance entre le point A et un point de la droite (D).*