Math93.com

Inéquations et tableau de signe

Seconde

1 Résoudre une inéquation

Définition 1

Résoudre un inéquation dans un ensemble de réels D, c'est trouver tous les éléments de l'ensemble D qui vérifient l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions peut être : un ou une union d'intervalles ; l'ensemble vide $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple 1

$$(I_1)\ :\ 2x+1<5-4x$$
$$(I_1) \iff 6x<4$$
$$(I_1) \iff x<\frac{2}{3}$$
$$S_1=\left]-\infty\ ;\ \frac{2}{3}\right[$$

Exemple 2

$$(I_2)\ :\ 2x+1<5+2x$$
$$(I_2) \iff 0<4$$
$$S_2=\mathbb{R}$$

Exemple 3

$$(I_3)\ :\ 2x^2+1<x^2+2x$$
$$(I_3) \iff x^2-2x+1<0$$
$$(I_3) \iff (x-1)^2<0$$
$$\text{or } \forall x\in\mathbb{R},\ (x-1)^2\geq 0$$
$$S_3=\emptyset$$

2 Étude du signe du binôme ax+b

Soit le binôme $ax+b$, où a et b sont des réels et f la fonction affine qui à tout réel x associe $ax+b$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

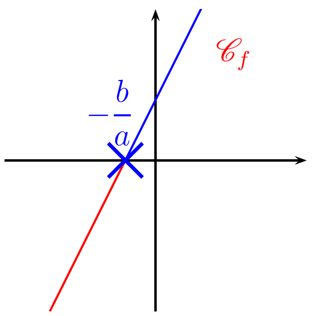
2.1 Cas trivial : Si $a=0$

Dans le cas où $a=0$, $f(x)=ax+b=b$ est donc trivialement du signe de b.

2.2 Cas n°2 : Si $a>0$

Tableau de signe (avec $a>0$) :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$ $(a>0)$		$-$	0	$+$	

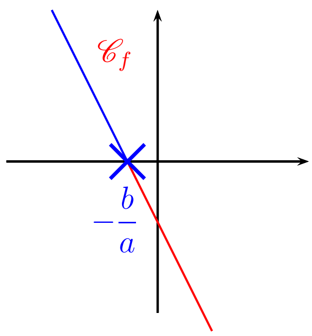


x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2.3 Cas n°3 : Si $a<0$

Tableau de signe (avec $a<0$) :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$ $(a<0)$		$+$	0	$-$	



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	0	$\searrow$

3 Tableau de signes

Méthode : Pour étudier le signe d'une expression composée de produits ou de quotients de facteurs :

1. on détermine les valeurs interdites dans le cas d'un quotient ;
2. on étudie le signe de chaque facteur ;
3. on résume l'étude dans un tableau de signe et on conclut si on cherche à résoudre une inégalité.

Exemple 1

Exemple : Étudions le signe de l'expression : $f(x) = \dfrac{2(2x+1)(1-3x)}{(x+5)(-4x)}$

1. **Valeurs interdites**

- $x + 5 \neq 0$ soit $x \neq -5$;
- $-4x \neq 0$ soit $x \neq 0$.

Les valeurs interdites sont donc -5 et 0 donc l'étude de signe sera faite sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\ ;\ 0\}$

2. **Étude du signe de chaque facteur**

Les quatre types de rédactions proposée sont possibles. Cette partie peut être allégée en rappelant par exemple :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$)		Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

- **Étude du signe de $2x+1$** :
  $2x + 1 = 0 \iff x = \dfrac{-1}{2}$ et donc
  on a $(2x+1)$ positif après $x = \dfrac{-1}{2}$ et négatif avant.
- **Étude du signe de $1-3x$** :
  $1 - 3x = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$ et donc
  on a d'après le cours $1 - 3x > 0 \iff x < \dfrac{1}{3}$
- **Étude du signe de $x+5$** :
  $x + 5 = 0 \iff x = -5$.
  Donc $(x+5)$ est positif si $x > 5$ et négatif si $x < 5$.
- **Étude du signe de $-4x$** :
  $-4x > 0 \iff x < 0$
  et $-4x = 0 \iff x = 0$

3. **Tableau de signes**

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $2x + 1$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$		$+$	
signe de $1 - 3x$		$+$	||	$+$		$+$	||	$+$	0	$-$	
signe de $x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	||	$+$		$+$	
signe de $-4x$		$+$	||	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\dfrac{2(2x+1)(1-3x)}{(x+5)(-4x)}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

On a donc

$$\boxed{f(x) > 0 \iff x \in]-\infty\ ;\ -5[\cup \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[\quad \text{et} \quad f(x) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\right\}}$$