Pourcentages

Seconde

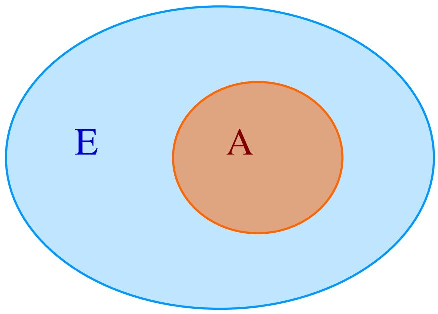
I. Pourcentages et proportions (*percentage and proportion*)

I.1 Définition : calculer un pourcentage

Définition 1 (Pourcentage d'une partie par rapport à un tout)

Soit A une partie d'un ensemble E.
On note Card E et Card A les nombres d'éléments de respectivement E et A.
La proportion des éléments de A par rapport à ceux de E est le quotient p :

$$\boxed{p = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } E} \in [0\ ;\ 1]}$$



I.2 Exemple : parts de marché

Exercice 1

En 2021, il s'est vendu dans le monde 1,354 8 milliards de smartphones.
Le leader est Samsung avec 272 millions de ventes suivi par Apple avec 253,7 millions d'appareils vendus et Xiaomi 191 millions.
Quel est la proportion de smartphone Samsung vendus en 2021 ?

Corrigé

En 2021, le pourcentage (ou la proportion) de smatphones Samsung parmi tous les smartphones vendus est donc, arrondi au dix-millième ou au centième de pour-cent :

$$p_S = \frac{272 \times 10^6}{1\,354{,}8 \times 10^6} = \frac{272}{1\,354{,}8} \approx 0,20076764 \text{ soit } \boxed{p_S \approx 20,01\ \%}$$

Source : www.eco-conscient.com

Remarque

La proportion p_S peut s'écrire indifféremment

$$p_S \approx 0,2001 \text{ ou } p_S \approx 20,01\% \text{ ou } p_S \approx \frac{20,01}{100}$$

Remarque

Il faut que les deux termes du quotient soient de **même « unité »**, ne pas mélanger millions et milliers et milliards par exemple !

I.3 Définition : appliquer un pourcentage

Définition 2 (Pourcentage d'une quantité)

Prendre t % d'un nombre c'est le multiplier $\frac{t}{100}$.

I.4 Exemple

Exercice 2

In 2019, the average Mathematics SAT score in the US was 528. In 2020 the average Mathematics SAT score in the US decreased of 0.94% from 2019. Sources : https://usafacts.org

De combien de points le score a-t-il baissé ?

Corrigé

$$\frac{0,94}{100} \times 523 = 4.9162$$

Soit une baisse d'environ 5 points.

II. Taux d'évolutions (*Percentage change*)

II.1 Propriété : augmenter ou diminuer de x % (*Percentage increase and decrease*)

Propriété 1

Soit x un nombre strictement positif.

1. Augmenter une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 + x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times (1+x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div (1+x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 - x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times (1-x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div (1-x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Preuve

1. Augmenter une quantité V de x % c'est lui ajouter x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i + v_i \times x\,\%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i + v_i \times x\,\% = v_i \times \left(1 + x\,\%\right) = v_i \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est lui soustraire x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i - v_i \times x\,\%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i - v_i \times x\,\% = v_i \times \left(1 - x\,\%\right) = v_i \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}$$

II.2 Exemple

Exercice 3

Pendant les soldes on affiche le prix d'un tablette tactile à 114 euros après une baisse de 62%.
Quelle était son prix avant les soldes ?

$$\begin{tikzcd} v_i = ? \arrow[rr, bend left, "\times (1 - 62\,\%)"] & & v_f = 114€ \arrow[ll, bend left, "\div (1 - 62\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Correction

On a donc :

$$v_f = v_i \times (1 - 62\,\%) \iff 114 = v_i \times 0,38 \iff \boxed{v_i = \frac{114}{0,38} = 300€}$$

II.3 Définition : pourcentage d'évolution

Définition 3

Soit une quantité qui évolue d'une valeur initiale v_i à une valeur finale v_f.

1. Le rapport $\dfrac{v_f - v_i}{v_i}$ s'appelle **taux d'évolution** ou **variation relative** de v_i à v_f.
2. Soit t le réel (positif ou négatif) tel que :

$$\boxed{\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100} = t\,\%}$$

On dit que $t\,\%$ est le **pourcentage d'évolution** ou **taux d'évolution** de v_i à v_f

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[rr, bend left, "\times (1 + t\,\%)"] & & v_f \arrow[ll, bend left, "\div (1 + t\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Remarque

Le taux d'évolution peut être positif ou négatif. Si le taux d'évolution est positif, l'évolution est une augmentation, sinon c'est une diminution.

III. Bilan

Bilan

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[rr, bend left, "\times k = \times (1 + t\,\%)"] & & v_f \arrow[ll, bend left, "\div k = \times \frac{1}{k}"] \end{tikzcd}$$

$k = 1 + t\,\%$	$t\,\% = k - 1$
$k = \dfrac{V_f}{V_i}$	$t\,\% = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$

III.1 Passage du taux au coefficient multiplicateur

Il est utile de savoir rapidement passer de coefficient multiplicateur au taux d'évolution et réciproquement.

III.1.1 Pour une augmentation :

Interprétation	**Coefficient multiplicateur k**	**Pourcentage d'évolution t %**
Augmentation de 1 %	$\times (1 + 1\ \%) = \boxed{\times 1,01}$	$t\ \% = +1\ \% = 0,01$
Augmentation de 5 %	$\times (1 + 5\ \%) = \boxed{\times 1,05}$	$t\ \% = +5\ \% = 0,05$
Augmentation de 10 %	$\times (1 + 10\ \%) = \boxed{\times 1,1}$	$t\ \% = +10\ \% = 0,1$
Augmentation de 20 %	$\times (1 + 20\ \%) = \boxed{\times 1,2}$	$t\ \% = +1\ \% = 0,2$
Augmentation de 50 % (on ajoute la moitié)	$\times (1 + 50\ \%) = \boxed{\times 1,5}$	$t\ \% = +50\ \% = 0,5$
La valeur double	$\times 2$	$(1 + t\ \%) = 2 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 1 = 100\ \%}$
La valeur triple	$\times 3$	$(1 + t\ \%) = 3 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 2 = 200\ \%}$
La valeur quadruple	$\times 4$	$(1 + t\ \%) = 4 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 3 = 300\ \%}$
La valeur est multipliée par 10	$\times 10$	$(1 + t\ \%) = 10 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 9 = 900\ \%}$
La valeur est multipliée par 11	$\times 11$	$(1 + t\ \%) = 11 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 10 = 1000\ \%}$

III.1.2 Pour une baisse :

Interprétation	**Coefficient multiplicateur k**	**Pourcentage d'évolution t %**
Baisse de 1 %	$\times (1 - 1\ \%) = \boxed{\times 0,99}$	$t\ \% = -1\ \% = -0,01$
Baisse de 5 %	$\times (1 - 5\ \%) = \boxed{\times 0,95}$	$t\ \% = -5\ \% = -0,05$
Baisse de 10 %	$\times (1 - 10\ \%) = \boxed{\times 0,9}$	$t\ \% = -10\ \% = -0,1$
Baisse de 20 %	$\times (1 - 20\ \%) = \boxed{\times 0,8}$	$t\ \% = -20\ \% = -0,2$
Baisse de 50 % (on divise par deux)	$\times (1 - 50\ \%) = \boxed{\times 0,5 = \times \frac{1}{2}}$	$t\ \% = -50\ \% = -0,5$
Baisse de 75 % (on divise par 4)	$\times (1 - 75\ \%) = \boxed{\times 0,25 = \times \frac{1}{4}}$	$t\ \% = -75\ \% = -0,75$
Baisse de 80 % (on divise par 5)	$\times (1 - 80\ \%) = \boxed{\times 0,2 = \times \frac{1}{5}}$	$t\ \% = -80\ \% = -0,8$
Baisse de 90 % (on divise par 10)	$\times (1 - 90\ \%) = \boxed{\times 0,1 = \times \frac{1}{10}}$	$t\ \% = -90\ \% = -0,9$
Baisse de 100 % (on perd tout)	$\times (1 - 100\ \%) = \boxed{\times 0}$	$t\ \% = -100\ \% = -1$

IV. Évolutions successives (*Compound Percentage Changes*)

IV.1 Propriété

Propriété 2

Si une quantité Q qui subit une évolution relative (hausse ou baisse) d'un taux de t_1 % suivie d'un autre évolution relative d'un taux de t_2 %,
alors cette quantité Q est multipliée par le coefficient $\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$.

$$Q \xrightarrow{\times\left(1+t_1\ \%\right)} Q\times\left(1+t_1\ \%\right) \xrightarrow{\times\left(1+t_2\ \%\right)} Q\times\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$$

IV.2 Exemple 1

Le cours d'une action augmente une première fois de 10 % puis une seconde fois de 20 %. Quel est le pourcentage global d'augmentation ?

Correction

- Augmenter de 10 % c'est multiplier par $1+10\ \%=1,1$.
- Augmenter de 20 % c'est multiplier par $1+20\ \%=1,2$.
- Après ces deux augmentations, le prix de l'action est donc multiplié par :

$$k=1,1\times 1,2=1,32$$

- Le coefficient multiplicateur de ces deux évolutions est donc de $k=1,32$. Or puisque

$$k=1,32=1+0,32=1+\frac{32}{100}=1+32\ \%$$

le taux de l'augmentation globale est de $t\ \ \%=32\%$.

IV.3 Exemple 2 : L'erreur du JT de France 2

Exemple

Jean-Paul Chapel lors du JT de France 2 du 19 Février 2013 précise en réponse à une question de la journaliste Elise Lucet :

- **Elise Lucet**
« [...] *notre facture pourrait gonfler de 30 % en 5 ans.* »
- **Jean-Paul Chapel** du service économie de France 2 :
« [...] *On n'avait jamais vu ça ! + 6 % par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30 %.* [...] »

Source : math93.com

Faire une augmentation de + 6 % pendant cinq ans, cela revient à multiplier le montant de la facture par le coefficient :

$$k=\left(1+6\ \%\right)^5=1,06^5\approx 1,3382255776\approx 1+0,34=1+34\%$$

Cela correspond donc a une augmentation d'environ 34 % et non de 30 % comme le précisait le journaliste.

V. Évolutions réciproques

V.1 Propriété

Propriété 3

Soit une quantité Q qui subit deux évolutions successives telles que Q passe de la valeur Q_1 à la valeur Q_2, avec un taux d'évolution t_1 %, puis de la valeur Q_2 à la valeur initiale Q_1, avec un taux d'évolution t_2 %.

$$Q_1 \xrightarrow{\times\left(1+t_1\,\%\right)} Q_2 = Q_1 \times (1+t_1\,\%) \xrightarrow{\times\left(1+t_2\,\%\right)} Q_1 = Q_1 \times \left(1+t_1\,\%\right) \times \left(1+t_2\,\%\right)$$

On a alors de façon évidente :

$$\boxed{\left(1+t_1\,\%\right) \times \left(1+t_2\,\%\right) = 1}$$

On dit que **t_2 % est le taux d'évolution réciproque de t_1 %** et réciproquement.

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, bend left, "\times k_1 = (1+t_1\,\%)"] & Q_2 \arrow[l, bend left, "\div k_1 = \times \frac{1}{k_1} = \times k_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{k_2 = \frac{1}{k_1} \Longrightarrow t_2\% = k_2 - 1 = \frac{1}{k_1} - 1} \text{ ou } \boxed{t_2\,\% = \frac{1}{\left(1+t_1\,\%\right)} - 1}$$

V.2 Exemple

Le prix de vente d'un objet a augmenté de 15 % le 1er septembre. Le 20 septembre, le vendeur veut accorder une remise à son client préféré de telle sorte que le prix à payer soit identique à celui pratiqué avec l'augmentation. Quel pourcentage de réduction doit-il consentir ?

Correction

- Augmenter de $t_1\,\% = 15\,\%$ c'est multiplier par $1 + 15\,\% = 1,15$.
- Le taux d'évolution réciproque $t_2\,\%$ vérifie donc l'égalité :

$$\left(1+t_1\,\%\right) \times \left(1+t_2\,\%\right) = 1$$

soit

$$1,15 \times \left(1+t_2\,\%\right) = 1$$

d'où

$$t_2\,\% = \frac{1}{1,15} - 1 \approx -0{,}130\,434\,78 \approx -13,04\,\%$$

Le vendeur accorde donc **une remise de 13, 04 %** sur le prix pratiqué le 20 septembre.

Fin du cours