



I Un peu d'histoire

- **Naissance d'une notion**

Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant, c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Le problème initial le plus fameux est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Le mathématicien italien Luca Pacioli l'évoque dans son *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494.

- **Le premier traité de probabilité par Christiaan Huygens (1629-1695).**



Lors d'un voyage à Paris, le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens, prend connaissance de la correspondance entre les mathématiciens français Fermat (1601-1665) et Pascal (1623-1662). Il étudie ces réflexions et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). C'est le premier traité consacré à cette nouvelle théorie des probabilités.

Le contenu du livre de Huygens est assez limité mais il y introduit ce qui deviendra la notion d'*espérance mathématique*.

Il donne une solution au problème du partage des mises, analogue à celle de Pascal. Enfin, il propose à ses lecteurs cinq problèmes relatifs à des lancers de dés, à des tirages dans des urnes, à des tirages de cartes.

- **Bernoulli et la loi des grands nombres.**

Un autre traité, plus complet, sur les probabilités, est l'oeuvre d'un mathématicien suisse, Jakob Bernoulli. Il est publié en 1713.

Cet ouvrage aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre la *loi faible des grands nombres* pour le jeu de pile ou face, appelé théorème de Bernoulli.

- **Pour en savoir plus** : Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com

II Vocabulaire des évènements

Dans tout ce qui suit, les lettres n et i désignent des entiers naturels non nul.

II.1 Expérience aléatoire

Définition 1

Une expérience est dite *aléatoire* lorsque l'on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4. Tirer une boule, c'est réaliser une expérience aléatoire.

II.2 Univers, évènements

Définition 2

- Issue** : Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
- Univers** : L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers. On le note souvent Ω (lire Oméga).
- Évènement** : Un évènement est un sous-ensemble, c'est à dire une partie de l'univers Ω . On le note souvent par une lettre majuscule, par exemple A, B, C, E.
- Évènement élémentaire** : Un évènement élémentaire est une issue de l'expérience.
- On dit qu'une issue réalise un évènement lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'évènement.

Exemple 1

- Les issues possibles sont 1, 2, 3 et 4.
- L'univers associé est alors $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
- $A = \{1 ; 2\}$ est un évènement et $B = \{1\}$ un évènement élémentaire ou issue.
- L'évènement A se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 »

Définition 3

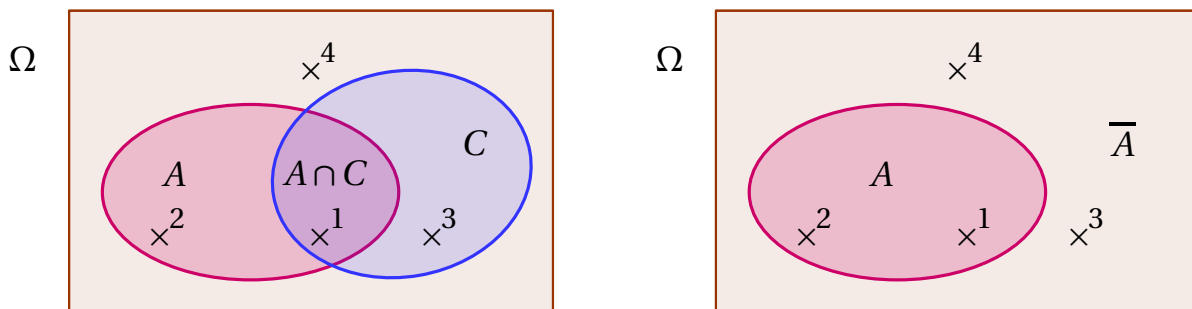
- Évènement impossible** : L'évènement impossible est l'ensemble vide noté \emptyset .
- Évènement certain** : L'évènement certain est l'univers Ω . Toutes les issues le réalisent.

II.3 Intersection, réunion, évènement contraire

Définition 4

Soit A et B deux évènements liés à une expérience aléatoire.

- Intersection de A et B** : L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est un évènement constitué des issues réalisant A et B en même temps.
- Évènements incompatibles ou disjoints** : Deux évènements sont incompatibles (ou disjoints) quand leur intersection est vide, c'est à dire quand $A \cap B = \emptyset$. Ils ne peuvent être réalisés en même temps.
- Réunion de A et B** : L'union (ou réunion) de A et B, notée $A \cup B$ est un évènement constitué des issues réalisant A ou B, c'est à dire l'un des deux.
- Évènement contraire** : L'évènement contraire de l'évènement A est constitué des issue de l'univers Ω ne réalisant pas A. On le note \bar{A} .



Exemple 1

Avec $\begin{cases} \Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \\ A = \{1 ; 2\} \\ C = \{1 ; 3\} \end{cases}$ on a $\begin{cases} A \cap C = \{1\} \\ A \cup C = \{1 ; 2 ; 3\} \\ \bar{A} = \{3 ; 4\} \end{cases}$ et $\begin{cases} \bar{C} = \{2 ; 4\} \\ \bar{A} \cap \bar{C} = \{4\} \\ \bar{A} \cup \bar{C} = \{2 ; 3 ; 4\} \end{cases}$, $\overline{A \cap C} = \{2 ; 3 ; 4\} \neq \bar{A} \cap \bar{C}$.

III Probabilité d'un évènement sur un ensemble fini

III.1 Loi de probabilité

Définition 5 (Loi de probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω composé d'un nombre fini n d'évènements élémentaires :

$$\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \dots ; e_n\}$$

1. Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité sur l'univers Ω , c'est associer à chaque évènement élémentaire (ou issue) e_i , un réel positif ou nul p_i tel que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

2. Probabilité de e_i

Le nombre réel positif ou nul p_i est appelé probabilité de l'évènement élémentaire $\{e_i\}$. On note alors :

$$p(e_i) = p_i$$

3. Probabilité de l'évènement A

La probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui composent A . On note la alors : $p(A)$.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- L'univers associé est alors $\Omega = \{e_1 = 1 ; e_2 = 2 ; e_3 = 3 ; e_4 = 4\}$.
- Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p(e_1) = \frac{2}{8} = 0,25$$

On obtient de la même façon :

$$p(e_2) = \frac{2}{8} = 0,25 ; p(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375 ; p(e_4) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- Avec A l'évènement $A = \{1 ; 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » on a :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) = 0,5$$

Propriété 1

- 1. Évènement certain Ω .** La Probabilité de l'évènement certain Ω est :

$$p(\Omega) = 1$$

- 2. Évènement impossible \emptyset .** La probabilité de l'évènement impossible \emptyset est :

$$p(\emptyset) = 0$$

- 3. Pour tout évènement A on a :**

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

III.2 Lien entre fréquences et probabilités

Le mathématicien suisse, Jakob Bernoulli étudie le premier les liens entre fréquences et probabilités dans un ouvrage publié en 1713, juste après sa mort.

Cette oeuvre aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre la *loi faible des grands nombres* pour le jeu de pile ou face, appelé théorème de Bernoulli.

Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com

Propriété 2

Si l'on effectue une expérience aléatoire n fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un évènement se stabilise lorsque n devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe qui est égal à la probabilité de cet évènement.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- On simule sur tableur plusieurs tirages avec remise (on replace la boule tirée après chaque tirage) de boules dans une urne de même composition. On obtient alors :

n° sortis	1	2	3	4	Total
Fréquence pour $n = 100$ tirages	0,19	0,31	0,35	0,15	1
Fréquence pour $n = 1\ 000$ tirages	0,235	0,265	0,371	0,129	1
Fréquence pour $n = 5\ 000$ tirages	0,2495	0,2505	0,3735	0,1265	1

IV Calculs de probabilités

IV.1 Equiprobabilité sur un ensemble fini

Définition 6

Lorsque tous les évènements élémentaires d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité sur Ω .

Exemple 1

Dans cet exemple, on a vu que les évènements élémentaires n'avaient pas la même probabilité. On a par exemple $p(e_1) = 0,25$ et $p(e_3) = 0,375$. On n'est donc pas en situation d'équiprobabilité sur Ω

Exemple 2

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé cubique à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On a alors

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

Si le dé n'est pas truqué, on a exemple pour chacun des six évènements élémentaires qui compose Ω :

$$p(e_i) = \frac{1}{6}$$

On est donc en situation d'équiprobabilité sur Ω

Propriété 3

Si on est situation d'équiprobabilité sur l'univers Ω composé de n évènements élémentaires :

$$\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \dots ; e_n\}$$

Alors la probabilité de chaque évènement élémentaire est : $\frac{1}{n}$.

Point Bac

Par convention, tout exercice comportant des expressions telles que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « jetons indiscernables à toucher » indiquent que le modèle choisi est celui de l'équiprobabilité. Les puristes pourront s'en étonner mais les consignes officielles sont claires sur ce point.

Propriété 4

Si on est situation d'équiprobabilité sur un univers Ω composé de n évènements élémentaires, alors la probabilité de l'évènement A est égale au quotient du nombre d'évènements élémentaires composant A par n . Soit :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{n}$$

Exemple 2

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On a alors $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Soit H l'évènement « le résultat est un multiple de 3 » donc $H = \{3 ; 6\}$. On est en situation d'équiprobabilité (car le dé est dit équilibré) sur Ω donc :

$$p(H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

IV.2 Réunion, intersection et évènement contraire

Théorème 1

On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω et deux évènements A et B . L'équiprobabilité n'est pas requise.

1. A et B incompatibles : $A \cap B = \emptyset$

Dans le cas où A et B sont incompatibles, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$ on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

2. A et B quelconques

Pour tous les évènements A et B on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{ou} \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$

3. Évènement contraire \bar{A}

Pour tout évènement A on a :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \quad \text{ou} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- L'univers associé est alors $\Omega = \{e_1 = 1 ; e_2 = 2 ; e_3 = 3 ; e_4 = 4\}$ et la loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- Avec A l'évènement $A = \{1 ; 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » on a :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) = 0,5$$

- Avec C l'évènement $C = \{1 ; 3\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°3 » on a :

$$p(C) = p(e_1) + p(e_3) = 0,625$$

- On a vu que :

$$\begin{cases} \Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \\ A = \{1 ; 2\} \\ C = \{1 ; 3\} \end{cases} ; \begin{cases} A \cap C = \{1\} \\ A \cup C = \{1 ; 2 ; 3\} \\ \bar{A} = \{3 ; 4\} \end{cases} ; \begin{cases} \bar{C} = \{2 ; 4\} \\ \bar{A} \cap \bar{C} = \{4\} \\ \bar{A} \cup \bar{C} = \{2 ; 3 ; 4\} \end{cases}$$

- On peut alors calculer :

$p(\bar{C}) = 1 - p(C)$ $= 1 - 0,625$ $p(\bar{C}) = \underline{0,375}$	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ $= 1 - 0,5$ $p(\bar{A}) = \underline{0,5}$	Puisque $\bar{A} \cap \bar{C} = \{4\}$ alors $p(\bar{A} \cap \bar{C}) = p(e_4)$ $p(\bar{A} \cap \bar{C}) = \underline{0,125}$
--	--	---

Et donc :

$$p(\bar{A} \cup \bar{C}) = p(\bar{A}) + p(\bar{C}) - p(\bar{A} \cap \bar{C})$$

$$= 0,5 + 0,375 - 0,125$$

$$p(\bar{A} \cup \bar{C}) = \underline{0,75}$$

- Résultat logique puisque $\bar{A} \cup \bar{C} = \{2 ; 3 ; 4\}$ et donc $p(\bar{A} \cup \bar{C}) = p(e_2) + p(e_3) + p(e_4) = 0,75$.