Math93.com

Probabilités et échantillonnage

Seconde

I. Un peu d'histoire

- **Naissance d'une notion**
  Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant,c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.
  Le problème initial le plus fameux est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Le mathématicien italien Luca Pacioli l'évoque dans son *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494.

- **Le premier traité de probabilité par Christiaan Huygens (1629-1695).**

  Lors d'un voyage à Paris, le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens, prend connaissance de la correspondance entre les mathématiciens français Fermat (1601-1665) et Pascal (1623-1662). Il étudie ces réflexions et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). C'est le premier traité consacré à cette nouvelle théorie des probabilités.

- ***Pour en savoir plus** : Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com*

II. Vocabulaire des évènements (*event in english*)

Dans tout ce qui suit, les lettres n et i désignes des entiers naturels non nul.

II.1 Expérience aléatoire (*Random experiments in english*)

Définition 1

Une expérience est dite *aléatoire* lorsque l'on ne peut pas prévoir l'issue (*outcomes*) de cette expérience.

Exemple 1
Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.
Tirer une boule, c'est réaliser une expérience aléatoire.

II.2 Univers, évènements

Définition 2

1. **Issue (*individual outcomes*)** : Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
2. **Univers (*sample space*)** : L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers. On le note souvent Ω (lire Oméga).
   *A **sample space**, Ω (or S), is the set of all possible outcomes.*
3. **Évènement (*event*)** : Un évènement est un sous-ensemble, c'est à dire une partie de l'univers Ω. On le note souvent par une lettre majuscule, par exemple A, B, C, E.
4. **Évènement élémentaire (*elementary event*)** : Un évènement élémentaire est une issue de l'expérience.
   An event consisting of only a single outcome is called an elementary event or an atomic event ; that is, it is a singleton set.
5. On dit qu'une issue réalise un évènement lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'évènement.

Exemple 1
- Les issues possibles sont 1, 2, 3 et 4.
- L'univers associé est alors $\Omega = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 4\}$.
- $A = \{1 \ ; \ 2\}$ est un évènement et $B = \{1\}$ un évènement élémentaire ou issue.
- L'évènement A se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 »

Définition 3

1. **Évènement impossible** : L'évènement impossible est l'ensemble vide noté $\varnothing$.
2. **Évènement certain** : L'évènement certain est l'univers Ω. Toutes les issues le réalisent.

III. Probabilité d'un évènement sur un ensemble fini

III.1 Loi de probabilité (*Probability distribution*)

Définition 4 (Loi de probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω composé d'un nombre fini n d'évènements élémentaires :

$$\Omega = \{e_1 \ ; \ e_2 \ ; \ e_3 \ ; \ \cdots \ ; \ e_n\}$$

1. **Loi de probabilité (*Probability distribution*)**
   Définir une loi de probabilité sur l'univers Ω, c'est associer à chaque évènement élémentaire (ou issue) e_i, un réel positif ou nul p_i tel que :
   $$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$
   To specify a probability mass function p assigning a probability to each possible outcome.
2. **Probabilité de e_i**
   Le nombre réel positif ou nul p_i est appelé probabilité de l'évènement élémentaire $\{e_i\}$. On note alors :
   $$p\left(e_i\right) = p_i$$
3. **Probabilité de l'évènement A**
   La probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui composent A. On note la alors : $p\left(A\right)$.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- L'univers associé est alors $\Omega = \{e_1 = 1\ ;\ e_2 = 2\ ;\ e_3 = 3\ ;\ e_4 = 4\}$.
- Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p\left(e_1\right) = \frac{2}{8} = 0,25$$

  On obtient de la même façon :

$$p\left(e_2\right) = \frac{2}{8} = 0,25\ ;\ p\left(e_3\right) = \frac{3}{8} = 0,375\ ;\ p\left(e_4\right) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p\left(e_1\right)$	$0,25$	$0,25$	$0,375$	$0,125$	1

- Avec A l'évènement $A = \{1\ ;\ 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » on a :

$$p(A) = p\left(e_1\right) + p\left(e_2\right) = 0,5$$

III.2 Cas de l'équiprobabilité

Propriété 1 (Admis)

Dans une situation d'équiprobabilité c'est à dire quand toutes les issues de l'univers ont la même probabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple

Lorsqu'on lance un dé non truqué à 6 faces, l'événement B : « obtenir un multiple de 3 » est composé des issues équiprobables 3 et 6. Ce qui fait deux issues favorables à B sur un total de 6. Ainsi, on a

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exercice 1

On lance un dé non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 8. On considère les événements :

- A : « obtenir un diviseur de 12 »   et   B : « obtenir un nombre premier ».

Donner leur écriture ensembliste et calculer leur probabilité.

III.3 Évènements particuliers

Propriété 2

1. **Évènement certain Ω *(absolutely certain event)***. La Probabilité de l'évènement certain Ω est :

$$p(\Omega) = 1$$

2. **Évènement impossible $\varnothing$ (*impossible event*)** . La probabilité de l'évènement impossible $\varnothing$ est :

$$p(\varnothing) = 0$$

3. Pour tout évènement A on a :

$$\boxed{0 \leqslant p(A) \leqslant 1}$$

The probability of an impossible event is 0. The probability of an absolutely certain event is 1.

Propriété 3 (Évènements incompatibles (*mutually exclusive events*))

Deux évènements sont dits incompatibles lorsqu'aucune issue ne les réalise en même temps.

Exemple 1
Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit l'évènement $A = \{1 \ ; \ 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » ;
- et l'évènement $B = \{3\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 » .

Les évènements A et B sont incompatibles car aucune issue ne les réalise en même temps.

IV. Intersection et réunion d'événements

IV.1 Définitions

Définition 5

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

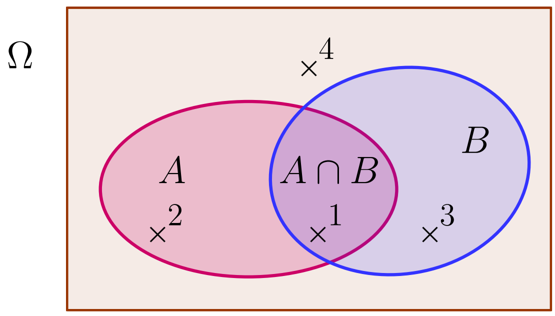
- L'intersection de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B (les deux à la fois). On le note :
$$A \cap B$$
- La réunion de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux). On le note :
$$A \cup B$$
- Les événements A et B sont incompatibles (*mutually exclusive events*) lorsque
$$A \cap B = \varnothing$$
Par conséquent, si A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$.

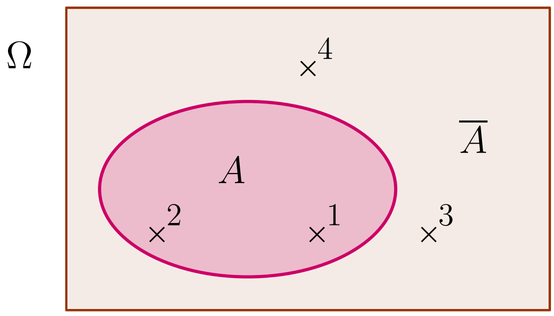
IV.2 Évènement contraire (*complementary event*)

Définition 6 (Évènement contraire (*complementary event*))

L'évènement contraire de l'évènement A est l'évènement qui se réalise quand A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$, ce qui se lit « A barre » .

IV.3 Exemples





Exemple 1

Avec $\begin{cases} \Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\} \\ A = \{1\,;\,2\} \\ C = \{1\,;\,3\} \end{cases}$ on a $\begin{cases} A \cap C = \{1\} \\ A \cup B = \{1\,;\,2\,;\,3\} \\ \overline{A} = \{3\,;\,4\} \end{cases}$ et $\begin{cases} \overline{C} = \{2\,;\,4\} \\ \overline{A} \cap \overline{C} = \{4\} \\ \overline{A} \cup \overline{C} = \{2\,;\,3\,;\,4\} \end{cases}$,

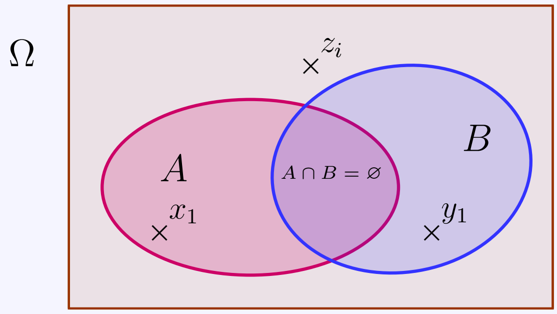
$$\overline{A \cap C} = \{2\,;\,3\,;\,4\} \neq \overline{A} \cap \overline{C} \quad \text{et} \quad A \setminus B = \{1\,;\,2\}$$

IV.4 Propriété : évènements incompatibles

Propriété 4

Si A et B sont deux événements incompatibles (donc si $A \cap B = \varnothing$) alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Preuve

On note N le nombre total d'issues. n est le nombre d'issues réalisant A et p le nombre d'issues réalisant B. Ainsi, en situation d'équiprobabilité :

$$p(A) = \frac{n}{N} \text{ et } p(B) = \frac{p}{N}$$

En posant :

$$A = \{x_1\ ;\ \cdots\ ;\ x_n\} \text{ et } B = \{y_1\ ;\ \cdots\ ;\ y_p\}$$

Et puisque $A \cap B = \varnothing$ on a :

$$A \cup B = \{x_1\ ;\ \cdots\ ;\ x_n\ ;\ y_1\ ;\ \cdots\ ;\ y_p\}$$

Ainsi, $A \cup B$ contient $n + p$ issues, d'où :

$$P(A \cup B) = \frac{n+p}{N} = \frac{n}{N} + \frac{p}{N} = p(A) + p(B)$$

IV.5 Propriété : évènement contraire

Propriété 5

La somme d'un évènement et de son évènement contraire vaut 1 ce qui s'écrit :

$$\boxed{P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1} \iff \boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}$$

Remarque : Un évènement et son contraire sont incompatibles mais si A et B sont incompatibles, cela ne signifie pas que B est le contraire de A.

Preuve

Les évènement A et $\overline{A}$ sont incompatibles de façon triviale donc d'après la propriété précédente :

$$\begin{cases} p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) \\ A \cup \overline{A} = \Omega \text{ et } p(\Omega) = 1 \end{cases} \implies P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$$

IV.5.1 Exemple 1

Exemple 1
Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

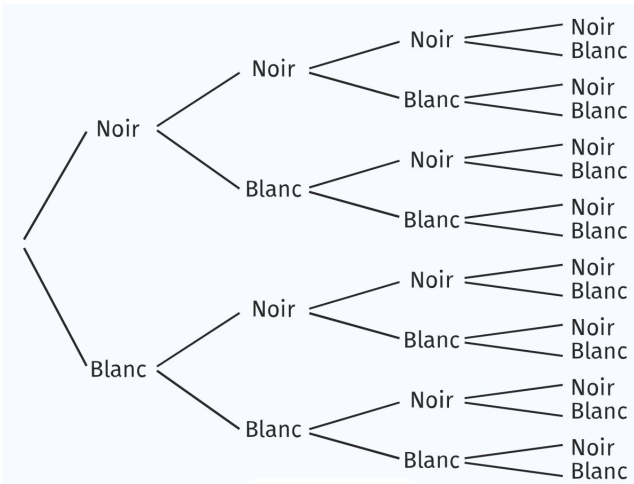
- Soit l'évènement $B = \{3\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 » .
- Le contraire de l'évènement B est l'évènement $\overline{B} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 ou le n°4 » .

On peut alors facilement vérifier que :

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{8}\ ;\ P(B) = \frac{5}{8} \Longrightarrow P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B)$$

IV.5.2 Exemple 2

Exercice 2
On tire un jeton au hasard dans une urne qui contient un jeton blanc et un jeton noir. Après le tirage, on remet le jeton tiré dans l'urne et on recommence cette expérience encore trois fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un jeton noir ?



Correction
L'événement complémentaire de « obtenir au moins un jeton noir » est « n'obtenir aucun jeton noir ».
Grâce à un arbre de dénombrement, on détermine que la probabilité de n'obtenir aucun jeton noir est de $\frac{1}{16}$
Donc la probabilité d'obtenir au moins un jeton noir est de

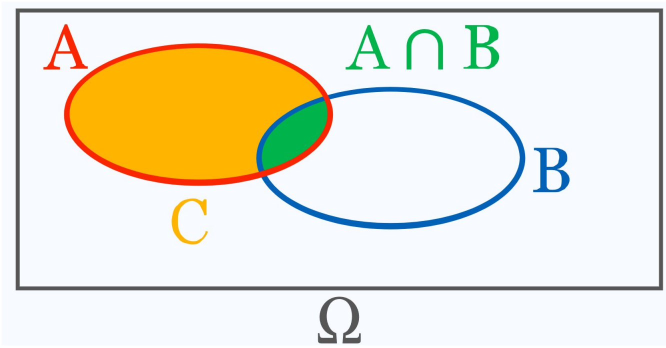
$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

IV.6 Propriété : union et intersection

Propriété 6

Soient A et B deux événements. On a :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



Preuve

Notons C l'événement composé des issues qui réalisent A mais pas B ($C = A \setminus B$).
Comme les événements C et B sont incompatibles, on a :

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B)$$

Or, $C \cup B = A \cup B$ d'où

$$P(A \cup B) = P(C) + P(B)$$

De plus, les événements C et $A \cap B$ sont incompatibles, donc on a

$$P(C \cup (A \cap B)) = P(C) + P(A \cap B)$$

Or, $C \cup (A \cap B) = A$ d'où

$$P(A) = P(C) + P(A \cap B) \Longrightarrow P(C) = P(A) - P(A \cap B)$$

Ainsi, en combinant les deux résultats, on obtient :

$$\begin{cases} P(C) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = P(C) + P(B) \end{cases} \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

C'est-à-dire :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

IV.6.1 Exemples

Méthode

- Chaque case du tableau nous donne la probabilité de l'intersection de deux événements.
- Pour trouver $P(A \cup B)$, on utilise la formule $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 3

On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré :

	Filles	Garçons	Total
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude.
On considère les évènement A : « l'adolescent choisi préfère les filmes d'action » et F : « l'adolescent choisi est une fille ». Calculer $P(A \cap F)$ et $P(A \cup F)$.

Correction

Dans le tableau, on peut lire qu'il y a 45 filles qui préfèrent les films d'action. Sachant que, sur les 180 adolescents qui ont été interrogés, 45 sont des filles qui préfèrent les films d'action, on a

$$P(A \cap F) = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

On trouve dans le tableau que

$$P(F) = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$$

et que

$$P(A) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

D'où

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{7} = \frac{31}{36}$$

V. Échantillonnage

V.1 Introduction

Le mathématicien suisse, Jakob Bernoulli étudie le premier les liens entre fréquences et probabilités dans un ouvrage publié en 1713, juste après sa mort.
Cette oeuvre aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre la *loi faible des grands nombres* pour le jeu de pile ou face, appelé théorème de Bernoulli.
Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com

Propriété 7

Si l'on effectue une expérience aléatoire n fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un évènement se stabilise lorsque n devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe qui est égal à la probabilité de cet évènement.

Français / *English*

Attention aux faux amis en anglais :

- effectif / *frequency*
- effectif cumulé / *cumulative frequency*)
- fréquence / *relative frequency*

V.2 Échantillon

Définition 7

Un échantillon de taille n est la liste des résultats obtenus lorsqu'on répète n fois une même expérience aléatoire de façon indépendante.
Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observé varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

Exemple

On joue à pile ou face 10 fois de suite.

- On obtient : pile-face-face-pile-pile-pile-face-pile-face-face.
  C'est un échantillon de taille 10.
  La fréquence de « face » est $\dfrac{1}{2}$
- On relance 10 fois les dés, on obtient : Pile-pile-face-pile-pile-pile-face-pile-face-pile
  C'est est un autre échantillon de taille 10.
  La fréquence de « face » est $\dfrac{3}{10}$.

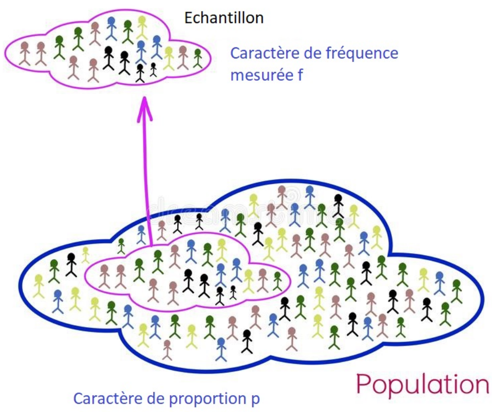
V.3 Estimation d'une proportion par une fréquence observée sur un échantillon

Remarque

On s'intéresse à l'apparition d'un certain caractère dans une population. On note p la proportion théorique d'individus présentant ce caractère dans la population totale et on cherche à donner une estimation de p en minimisant le risque d'erreur.

Introduction

L'échantillonnage est un domaine des mathématiques à la croisé entre statistiques et probabilités. L'idée est d'étudier une propriété d'une population dont l'effectif est trop grand pour être observée de façon exhaustive.
On prélève alors un échantillon de cette population, à partir duquel on souhaite obtenir des informations sur la population totale avec un certain degé de précision.
Un exemple connu est la réalisation de sondages.



Théorème 1 (Loi des grands nombres (version vulgarisée))

Lorsque n est grand, la fréquence observée f d'individus présentant le caractère étudié dans un échantillon de taille n est telle que, dans une grande majorité des cas :

$$\boxed{|f-p| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}} \iff \boxed{p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Exemple

Une urne contient 5000 boules : certaines sont noires et d'autres sont rouges mais on ne sait pas dans quelle proportion. Pour estimer la proportion de boules rouges dans cette urne, on prélève plusieurs échantillons de taille 100 dans cette urne et on observe la fréquence de boules rouges. On a représenté dans le graphique ci-dessus les fréquences observées pour 2000 échantillons de taille 100. On constate que, dans une grande majorité des cas, cette fréquence est comprise
entre $p-\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $p+\frac{1}{\sqrt{n}}$