

La racine carrée

Classes de Troisième - Seconde

Pour avoir des informations sur l'histoire du symbole racine carrée consultez la page www.math93.com/.../la-racine-carree

I Définition

Définition 1 (Racine carrée)

La racine carrée de a est le nombre positif qui, élevé au carré, donne a . On la note \sqrt{a} .

Exemples.

$\sqrt{0} = 0$	car	$0^2 = 0$	$\sqrt{49} = 7$	car	$7^2 = 49$	Approximations au millième à connaître $\sqrt{2} \approx 1,414$ $\sqrt{3} \approx 1,732$
$\sqrt{1} = 1$	car	$1^2 = 1$	$\sqrt{64} = 8$	car	$8^2 = 64$	
$\sqrt{4} = 2$	car	$2^2 = 4$	$\sqrt{81} = 9$	car	$9^2 = 81$	
$\sqrt{9} = 3$	car	$3^2 = 9$	$\sqrt{100} = 10$	car	$10^2 = 100$	
$\sqrt{16} = 4$	car	$4^2 = 16$	$\sqrt{121} = 11$	car	$11^2 = 121$	
$\sqrt{25} = 5$	car	$5^2 = 25$	$\sqrt{144} = 12$	car	$12^2 = 144$	
$\sqrt{36} = 6$	car	$6^2 = 36$	$\sqrt{169} = 13$	car	$13^2 = 169$	

II Propriétés

II.1 Propriétés liées à la définition

Propriété 1

1. Pour tout réel positif a on a : $\sqrt{a} \geq 0$;

2. Pour tout réel positif a on a : $(\sqrt{a})^2 = a$;

3. Pour tout réel x on a :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \text{distance à zéro de } x$$

II.2 Produit

Propriété 2 (Racine carrée d'un produit)

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemples

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{32} \\ &= \sqrt{16 \times 2} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$A = \boxed{4\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{150} \\ &= \sqrt{25 \times 6} \\ &= \sqrt{25} \times \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$B = \boxed{5\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} C &= 3\sqrt{8} - \sqrt{200} \\ &= 3\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{100 \times 2} \\ &= 3 \times 2 \times \sqrt{2} - 10 \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$C = \boxed{-4\sqrt{2}}$$

II.3 Quotient

Propriété 3 (Racine carrée d'un quotient)

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Exemples

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} \\ D &= \boxed{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 2 \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{20}{5}} \\ &= 2\sqrt{4} \\ E &= \boxed{4} \end{aligned}$$

II.4 Et l'addition ?

Il n'y a pas de règle pour l'addition. On a par exemple :

- $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$
- $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Or $\sqrt{2} \neq 2$

III Suppression des radicaux au dénominateur

Pour supprimer les radicaux au dénominateur d'une expression fractionnaire, on utilise, soit la propriété 1, soit l'expression conjuguée de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ qui est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Rappelons l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Propriété 4

- **Propriété 4a :** $\forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1 \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}}$

- **Propriété 4b :**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{4}{\sqrt{5}} \\ E &= \frac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{\sqrt{5} - 2} \\ F &= \frac{3 \times (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2) \times (\sqrt{5} + 2)} \\ F &= \frac{3 \times (\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 3 \times (\sqrt{5} + 2)}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \\ G &= \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{5})} \\ G &= \frac{3 - \sqrt{15}}{3 - 5} = \frac{3 - \sqrt{15}}{-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{G = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}}$$