



Math93.com

# Statistiques

## Seconde



### Français / English

Attention aux faux amis en anglais :

- effectif / *frequency*
- effectif cumulé / *cumulative frequency*
- fréquence / *relative frequency*

## I. Effectifs (*frequency*) et fréquences (*relative frequency*)

### I.1 Statistique

#### Définition 1

La statistique est une science qui étudie quantitativement les **caractères** des éléments (ou individus) d'une population. Les valeurs  $x_i$  du caractère sont appelées **modalités**.

La **modalité**  $x_i$  peut être la couleur des voitures présentes sur un parking ou une valeur numérique comme le nombre inscrit sur la face d'un dé cubique.

### I.2 Effectifs (*frequency*) et fréquences (*relative frequency*)

#### Définition 2

Dans une série statistique

- l'**effectif** d'une valeur (ou modalité)  $x_i$  est le nombre de données (ou individus) de la population prenant cette valeur, on la note  $n_i$  ;
- la **fréquence** est le quotient de l'effectif de la valeur ( $n_i$ ) par l'effectif total (noté  $N$ ), on la note souvent  $f_i$ .

$$f_i = \frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$$



### Remarque

Si il y a par exemple 6 valeurs ou modalités différentes  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  d'effectifs associés  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ .

Alors l'effectif total  $N$  est

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$$

ce que l'on notera en terminale :

$$N = \sum_{k=1}^6 n_k$$

### I.3 Exemple 1



#### Exemple

On lance un dé cubique et on note les résultats obtenus.

|                  |                         |                        |       |       |      |     |       |
|------------------|-------------------------|------------------------|-------|-------|------|-----|-------|
| Valeurs $x_i$    | 1                       | 2                      | 3     | 4     | 5    | 6   | Total |
| Effectifs $n_i$  | 5                       | 10                     | 5     | 7     | 3    | 10  | 40    |
| Fréquences $f_i$ | $\frac{5}{40} = 12,5\%$ | $\frac{10}{40} = 25\%$ | 12,5% | 17,5% | 7,5% | 25% | 100%  |



#### Remarque

- Une fréquence se note généralement en pourcentage mais on peut parfois l'écrire sous forme de fraction ou sous forme décimale.

$$f_2 = \frac{10}{40} = 25\% = 0,25$$

- Une fréquence est un nombre entre 0 et 1.

### I.4 Effectifs cumulés croissants (*cumulative frequency*)

#### Définition 3 (Effectifs cumulés croissants (*cumulative frequency*))

On étudie un caractère quantitatif dans une population : ses valeurs sont numériques et on les note  $x_i$ .

- L'**effectif cumulé croissant** d'une valeur  $x_i$  est la somme des effectifs de toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à  $x_i$ .
- La **fréquence cumulée croissante** d'une valeur  $x_i$  est la somme des fréquences de toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à  $x_i$ .



#### Exemple

En reprenant l'exemple 1 précédent.

|                  |                         |                        |             |             |      |      |       |
|------------------|-------------------------|------------------------|-------------|-------------|------|------|-------|
| Valeurs $x_i$    | 1                       | 2                      | 3           | 4           | 5    | 6    | Total |
| Effectifs $n_i$  | 5                       | 10                     | 5           | 7           | 3    | 10   | 40    |
| ECC              | 5                       | 5 + 10 = 15            | 15 + 5 = 20 | 20 + 7 = 27 | 30   | 40   | ...   |
| Fréquences $f_i$ | $\frac{5}{40} = 12,5\%$ | $\frac{10}{40} = 25\%$ | 12,5%       | 17,5%       | 7,5% | 25%  | 100%  |
| FCC              | 12,5%                   | 37,5%                  | 50%         | 67,5%       | 75%  | 100% | ...   |

Par exemple :

- l'effectif cumulé croissant correspondant à la valeur  $x_i = 2$ , soit 15 indique qu'il y a **15 valeurs inférieures ou égales à 2**.
- la fréquence cumulée croissante correspondant à la valeur  $x_i = 2$ , soit 37,5% indique qu'il y a **37,5% des valeurs qui sont inférieures ou égales à 2**.

## II. Caractéristiques

### II.1 Caractéristiques de position

#### II.1.1 Moyenne (*average, mean*)

##### Définition 4 (Moyenne)

- La **moyenne** dite pondérée de cette série statistique, notée  $\bar{x}$ , est le quotient

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

- Cette moyenne peut aussi s'obtenir avec les fréquences :

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_px_p$$

|                                    |       |       |     |       |
|------------------------------------|-------|-------|-----|-------|
| <b>Valeurs <math>x_i</math></b>    | $x_1$ | $x_1$ | ... | $x_p$ |
| <b>Effectifs <math>n_i</math></b>  | $n_1$ | $n_1$ | ... | $n_p$ |
| <b>Fréquences <math>f_i</math></b> | $f_1$ | $f_1$ | ... | $f_p$ |



##### Exemple

|                                    |                         |                        |       |       |      |     |              |
|------------------------------------|-------------------------|------------------------|-------|-------|------|-----|--------------|
| <b>Valeurs <math>x_i</math></b>    | 1                       | 2                      | 3     | 4     | 5    | 6   | <b>Total</b> |
| <b>Effectifs <math>n_i</math></b>  | 5                       | 10                     | 5     | 7     | 3    | 10  | <b>40</b>    |
| <b>Fréquences <math>f_i</math></b> | $\frac{5}{40} = 12,5\%$ | $\frac{10}{40} = 25\%$ | 12,5% | 17,5% | 7,5% | 25% | <b>100%</b>  |

La moyenne s'obtient alors de deux façons :

$$\bar{x} = \frac{5 \times 1 + 10 \times 2 + \dots + 10 \times 6}{5 + 10 + \dots + 10} = \frac{143}{40} = \underline{3,575} \quad \text{ou} \quad \bar{x} = 0,125 \times 1 + 0,25 \times 2 + \dots + 0,25 \times 6 = \underline{3,575}$$



##### Remarque

Avec des classes ou intervalles.

Si la série est donnée sous forme de classes d'extrémité  $a$  et  $b$ , comme l'intervalle  $[a ; b[$  par exemple, on prend comme modalité le **centre de la classe** qui est égale à la moyenne des extrémités soit :  $\frac{a + b}{2}$ .

## II.1.2 La médiane (*median*)

### Définition 5 (Médiane (*median*))

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_N$  une série statistique quantitative de  $N$  valeurs. La **médiane** d'une série statistique, notée  $M_e$  est **une** valeur telle que :

- au moins 50% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à  $M_e$  ;
- et au moins 50% des valeurs de la série soient supérieures ou égales à  $M_e$  ;

En pratique en fait :

### Définition 6 (Médiane)

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_N$  une série statistique quantitative de  $N$  valeurs ordonnées. La **médiane** d'une série statistique, notée  $M_e$  est **une** valeur telle que :

- si  $N$  est **impair**, la valeur « du milieu » c'est à dire la valeur de rang :  $\frac{N+1}{2}$  ;
- si  $N$  est **pair**, toute valeur située entre les valeurs de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2} + 1$ .

On prendra souvent la moyenne des valeurs de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2} + 1$  ;



### Exemple

Dans l'exemple 1, il y a  $N = 40$  valeurs,  $N$  est pair.

- La valeur de rang  $N/2 = 20$  est 3 ;
- et celle de rang  $N/2 + 1 = 21$  est 4.

Une médiane possible est donc à prendre entre 3 et 4, on choisit généralement la moyenne soit  $M_e = 3,5$ .

## II.2 Caractéristiques de dispersion

### II.2.1 L'étendue (range)

#### Définition 7 (L'étendue (range))

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série.

#### Exemple

Dans l'exemple 1, l'étendue est :  $e = 6 - 1 = 5$

### II.2.2 Quartiles (Quartiles)

#### Définition 8 (Quartiles)

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_N$  une série statistique quantitative de  $N$  valeurs.

Le **premier quartile** d'une série statistique, notée  $Q_1$  est la plus petite valeur de la série telle que :

- au moins 25% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à  $Q_1$  ;
- et au moins 75% des valeurs de la série soient supérieures ou égales à  $Q_1$  ;

Le **troisième quartile** d'une série statistique, notée  $Q_3$  est la plus petite valeur de la série telle que :

- au moins 75% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à  $Q_3$  ;
- et au moins 25% des valeurs de la série soient supérieures ou égales à  $Q_3$  ;

L'**écart interquartile (interquartile range (IQR))** est :  $Q_3 - Q_1$ .



#### Exemple

- **Premier quartile  $Q_1$**

Il y a 40 valeurs et  $40 \div 4 = 10$  donc  $Q_1$  sera la 10<sup>e</sup> valeur soit  $Q_1 = 2$ .

- **Troisième quartile  $Q_3$**

Il y a 40 valeurs et  $3 \times 40 \div 3 = 30$  donc  $Q_3$  sera la 30<sup>e</sup> valeur soit,  $Q_3 = 5$ .

- **L'écart interquartile** est :  $Q_3 - Q_1 = 3$ .



#### Remarque

Si par exemple on a 41 valeurs, alors  $41 \div 4 = 10,25$  donc  $Q_1$  sera la 11<sup>e</sup> valeurs. On prend toujours à la valeur de rang supérieur.

### II.3 Remarques

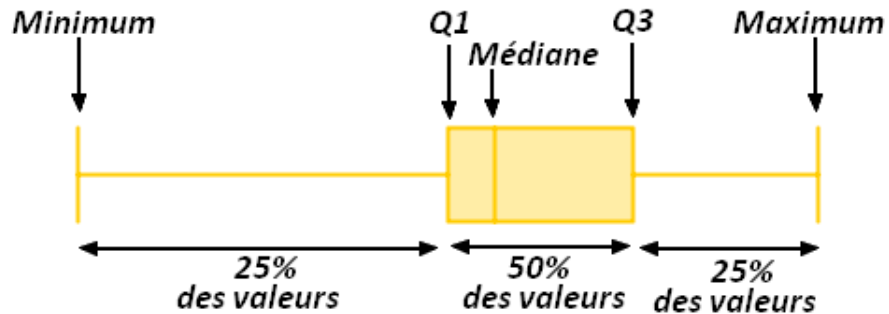


#### Remarque

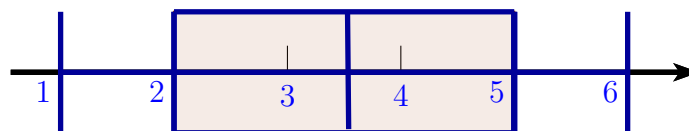
- La moyenne possède des propriétés de calcul que n'a pas la médiane.
- **Médiane et écart interquartile** sont **peu sensibles** aux valeurs extrêmes.
- **Moyenne et étendue** sont **sensibles** aux valeurs extrêmes.
- Pour conclure : Contrairement à la moyenne, la médiane, qui ne dépend que de l'ordre des valeurs, est peu sensible aux valeurs extrêmes. On préférera la médiane pour les séries fortement « asymétriques »

### II.4 La boîte à moustache (*The Box and Whiskers Plot*)

Dans les représentations graphiques de données statistiques, la boîte à moustaches (aussi appelée *diagramme en boîte*, *boîte de Tukey* ou *box plot* en anglais) est un moyen rapide de figurer le profil essentiel d'une série statistique quantitative. Elle a été inventée en 1977 par John Wilder Tukey (16 juin 1915 - 26 juillet 2000) l'un des plus importants statisticiens américains du XX<sup>e</sup> siècle. Notons toutefois qu'elle peut faire l'objet de certains aménagements selon les utilisateurs. Son nom est la traduction de *Box and Whiskers Plot*.



Avec l'exemple 1 on a alors :  $M_e = 3,5$  ;  $Min = 1$  ;  $Max = 6$  ;  $Q_1 = 2$  et  $Q_3 = 5$  donc :



### III. Variance et écart-type (*Variance and standard deviation*)

On va définir des caractéristiques qui vont rendre compte de la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

#### III.1 Définitions

On considère une série statistiques de moyenne  $\bar{m}$  :

|                 |       |       |         |       |       |
|-----------------|-------|-------|---------|-------|-------|
| Valeurs $x_i$   | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_p$ | Total |
| Effectifs $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_p$ | N     |

#### Définition 9

- La variance d'une série statistiques de moyenne  $\bar{m}$  est le réel  $V$ , défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{m})^2 + n_2(x_2 - \bar{m})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{m})^2}{N}$$

- L'écart-type correspondant est le réel positif, noté  $\sigma$  (se lit sigma) et défini par :  $\sigma = \sqrt{V}$ .



#### Remarque

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne : plus l'écart-type est grand, plus les valeurs sont dispersées et moins la moyenne représente de façon significative la série.

#### III.2 Exemple



#### Exemple

On considère la série ci-dessous de moyenne  $\bar{m} = 3,4$  :

|           |   |   |   |   |       |
|-----------|---|---|---|---|-------|
| Valeurs   | 1 | 2 | 4 | 5 | Total |
| Effectifs | 2 | 5 | 9 | 4 | 20    |

Compléter le tableau afin de trouver la variance.

|                                |       |       |       |       |       |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Valeurs $x_i$                  | 1     | 2     | 4     | 5     | Total |
| Effectifs $n_i$                | 2     | 5     | 9     | 4     | 20    |
| $(x_i - \bar{m})^2$            | ..... | ..... | ..... | ..... | X     |
| $n_i \times (x_i - \bar{m})^2$ | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |

Donc

$$V = \frac{\dots\dots\dots}{20} = \dots\dots$$

Et

$$\sigma = \sqrt{V} \approx \dots\dots$$

*Solution en dernière page.*

### III.3 Propriété

**Propriété 1**

Si les valeurs de la série sont données avec les fréquences alors :

$$V = f_1 (x_1 - \bar{m})^2 + f_2 (x_2 - \bar{m})^2 + \dots + f_p (x_p - \bar{m})^2$$

### III.4 Une autre définition de la variance

#### III.4.1 Définition

On considère une série statistiques de moyenne  $\bar{m}$  :

|                 |       |       |         |       |       |
|-----------------|-------|-------|---------|-------|-------|
| Valeurs $x_i$   | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_p$ | Total |
| Effectifs $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_p$ | N     |

**Définition 10**

- La variance d'une série statistiques de moyenne  $\bar{m}$  est le réel  $V_2$ , défini par :

$$V_2 = \frac{n_1 \times x_1^2 + n_2 \times x_2^2 + \dots + n_p \times x_p^2}{N} - (\bar{m})^2$$

- Elle s'obtient en effectuant la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne.

#### III.4.2 Exemple



**Exemple**

On considère la série ci-dessous de moyenne  $\bar{m} = 3,4$  :

|           |   |   |   |   |       |
|-----------|---|---|---|---|-------|
| Valeurs   | 1 | 2 | 4 | 5 | Total |
| Effectifs | 2 | 5 | 9 | 4 | 20    |

Compléter le tableau afin de trouver la variance.

|                    |       |       |       |       |       |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Valeurs $x_i$      | 1     | 2     | 4     | 5     | Total |
| Effectifs $n_i$    | 2     | 5     | 9     | 4     | 20    |
| $x_i^2$            | ..... | ..... | ..... | ..... | X     |
| $n_i \times x_i^2$ | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |

Donc

$$V_2 = \frac{\dots\dots\dots}{20} - 3,4^2 = \dots\dots$$

Et

$$\sigma = \sqrt{V_2} \approx \dots\dots$$

*Solution en dernière page.*

## IV. Complément : La calculatrice

### IV.1 La calculatrice : Quartiles, médiane

#### Énoncé

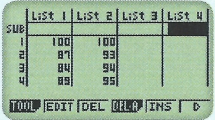
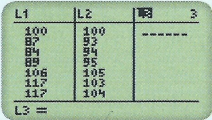
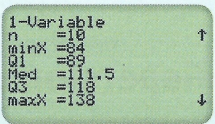

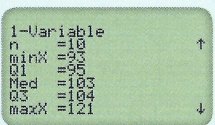
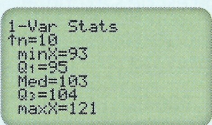
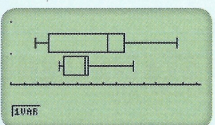

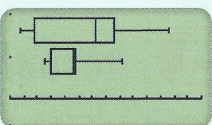
On a relevé l'évolution du cours moyen du dollar (USD) et de la livre (GBP) par rapport à l'euro (EUR) depuis son introduction en 1999.

On a retenu l'indice 100 en 1999 (*source : ECB 2010*).

| Année | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| USD   | 100  | 87   | 84   | 89   | 106  | 117  | 117  | 118  | 129  | 138  |
| GBP   | 100  | 93   | 94   | 95   | 105  | 103  | 104  | 103  | 104  | 121  |

Avec la calculatrice, afficher la médiane, les quartiles et le diagramme en boîte de chacune de ces séries.

#### Solution

| Commentaires   | Casio  | TI  |
|--|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>On entre les données.</li> </ul>  | <b>MENU</b> 2 (STAT)    | <b>STAT</b> 1 (Edit)   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>On affiche les paramètres.</li> </ul>   | <b>F2</b> (CALC) <b>F6</b> (Set)<br>1 Var XList : List 1<br>1 Var Freq : 1<br><b>F1</b> (1 VAR)    | <b>STAT</b> ► (CALC)<br>1 (1-Var Stats) <b>2nd</b> <b>L1</b>    |
|  | <b>F6</b> (Set)<br>1 Var XList : List 2<br>1 Var Freq : 1<br><b>F1</b> (1 VAR)    | <b>STAT</b> ► (CALC)<br>1(1-Var Stats) <b>2nd</b> <b>L2</b>    |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>On affiche les diagrammes en boîte.</li> </ul> <p>Régler la fenêtre graphique (ici, <math>75 \leq X \leq 150</math>, pas 5 et <math>-1 \leq Y \leq 2</math>).</p> | <b>EXIT</b> <b>EXIT</b> <b>F1</b> (GRPH) <b>F6</b> (SET)<br>Graph Type : Box<br>XList : List 1<br>Frequency : 1<br>Recommencer pour Graph 2<br><b>EXIT</b> <b>F4</b> (SEL)<br>Stat Graph 1 : Draw On<br>Stat Graph 2 : Draw On<br><b>F6</b> (DRAW)  | <b>2nd</b> <b>STATPLOT</b> <b>ENTER</b><br>Renseigner : On <b>ENTER</b><br>Type : <br>XList : L1<br>Fréq : 1<br>Recommencer avec Plot 2 <b>GRAPH</b>  |

**Conclusion :** Durant cette période, l'indice médian est de 103 pour la livre et 111,5 pour le dollar. Les variations de cet indice sont plus resserrées autour de la médiane pour la livre (écart interquartile : 9 points) que pour le dollar (écart interquartile : 29 points).

## IV.2 La calculatrice : Moyenne, écart-type

### Calculatrices CASIO

Choisir le mode **STAT**.

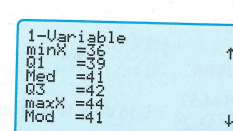
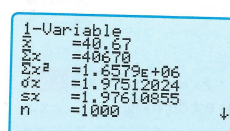
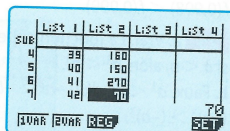
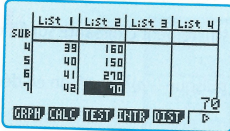
• **Calculer les paramètres d'une série statistique**

Exemple : on donne la série statistique suivante :

|           |    |    |    |     |     |     |    |     |     |
|-----------|----|----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| Valeurs   | 36 | 37 | 38 | 39  | 40  | 41  | 42 | 43  | 44  |
| Effectifs | 20 | 40 | 70 | 160 | 150 | 270 | 70 | 120 | 100 |

On commence par entrer les valeurs dans *List1* et les effectifs dans *List2* ; on sélectionne ensuite les instructions **CALC** (touche **F2**) et **SET** (touche **F6**). Pour 1Var XList choisir *List1* et pour 1VAR Freq choisir *List2*. Appuyer sur **EXIT**.

Les paramètres de la série sont obtenus en sélectionnant 1Var (touche **F1**). On lit la **moyenne**  $\bar{x} = 40,67$ , l'**écart-type**  $\sigma_x \approx 1,975$  et la **médiane**  $Med = 41$ .



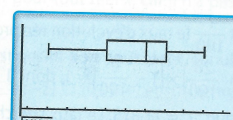
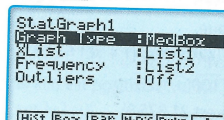
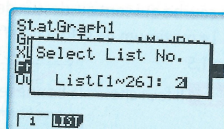
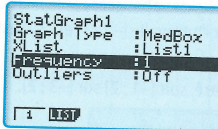
• **Représenter une série par un diagramme en boîte**

① Dans l'écran des listes, sélectionner l'instruction **GRPH** (touche **F1**) puis **SET** (touche **F6**).

② L'écran *StatGraph1* permet de choisir le type de diagramme : aller sur *Graph Type* puis sélectionner l'instruction **Box** (touches **▶** puis **F2**).

③ Pour XList, choisir *List1* et pour Frequency, choisir *List2* (touches **F2** puis **2**).

④ Appuyer sur la touche **EXIT** et sélectionner **GPH1** (touche **F1**).



### Calculatrices TEXAS

Appuyer sur la touche **stats**.

• **Calculer les paramètres d'une série statistique**

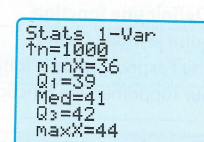
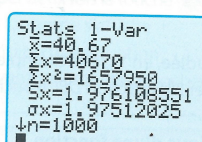
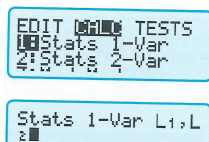
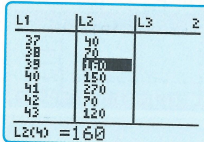
Exemple : On donne la série statistique suivante :

|           |    |    |    |     |     |     |    |     |     |
|-----------|----|----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| Valeurs   | 36 | 37 | 38 | 39  | 40  | 41  | 42 | 43  | 44  |
| Effectifs | 20 | 40 | 70 | 160 | 150 | 270 | 70 | 120 | 100 |

Sélectionner **1:Edite** puis **entrer**. On commence par entrer les valeurs dans L1 et les effectifs dans L2.

On revient au menu **Statistiques** en appuyant sur **stats**. Pour calculer les paramètres de la série, choisir **CALC** et **1:Stats 1-Var**, valider par **entrer**, puis saisir L1, L2 (touches **2<sup>nde</sup>** **1**, **2<sup>nde</sup>** **2**) et valider par **entrer**.

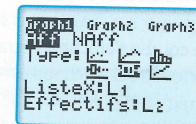
On lit la **moyenne**  $\bar{x} = 40,67$ , l'**écart-type**  $\sigma_x \approx 1,975$  et la **médiane**  $Med = 41$ .



• **Représenter une série par un diagramme en boîte**

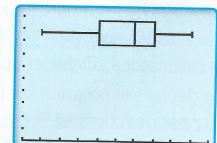
① Sélectionner l'instruction **graph stats** (touches **2<sup>nde</sup>** **f(x)**). Puis sélectionner **1:Graph1** en appuyant sur **entrer**.

② L'écran *Graph1* permet de choisir le type de diagramme avec les flèches **▼** et **▶** du pavé directionnel, sélectionner **Aff**, valider par **entrer**, puis **2<sup>nde</sup>** **2** et valider par **entrer**.



③ Appuyer sur la touche **zoom** pour accéder au menu **ZOOM**.

④ Sélectionner **9:ZoomStat**.



## Corrections

### Correction de l'exemple du III.2



#### Exemple

On considère la série ci-dessous de moyenne  $\bar{m} = 3,4$  :

|           |   |   |   |   |       |
|-----------|---|---|---|---|-------|
| Valeurs   | 1 | 2 | 4 | 5 | Total |
| Effectifs | 2 | 5 | 9 | 4 | 20    |

Compléter le tableau afin de trouver la variance.

|                                |       |      |      |       |       |
|--------------------------------|-------|------|------|-------|-------|
| Valeurs $x_i$                  | 1     | 2    | 4    | 5     | Total |
| Effectifs $n_i$                | 2     | 5    | 9    | 4     | 20    |
| $(x_i - \bar{m})^2$            | 5.76  | 1.96 | 0.36 | 2.56  | X     |
| $n_i \times (x_i - \bar{m})^2$ | 11.52 | 9.8  | 3.24 | 10.24 | 34.8  |

Donc

$$V = \frac{34,8}{20} = 1,74$$

Et

$$\sigma = \sqrt{1,74} \approx 1,32$$

### Correction de l'exemple du III.4.2



#### Exemple

On considère la série ci-dessous de moyenne  $\bar{m} = 3,4$  :

|           |   |   |   |   |       |
|-----------|---|---|---|---|-------|
| Valeurs   | 1 | 2 | 4 | 5 | Total |
| Effectifs | 2 | 5 | 9 | 4 | 20    |

Compléter le tableau afin de trouver la variance.

|                    |   |    |     |     |       |
|--------------------|---|----|-----|-----|-------|
| Valeurs $x_i$      | 1 | 2  | 4   | 5   | Total |
| Effectifs $n_i$    | 2 | 5  | 9   | 4   | 20    |
| $x_i^2$            | 1 | 4  | 16  | 25  | X     |
| $n_i \times x_i^2$ | 2 | 20 | 144 | 100 | 266   |

Donc

$$V_2 = \frac{266}{20} - 3,4^2 = 1,74$$

Et

$$\sigma = \sqrt{V_2} \approx 1,32$$