



I. Notion de vecteur (*vector*)

I.1 Parallélogramme (*Parallelogram*)

I.1.1 Définition

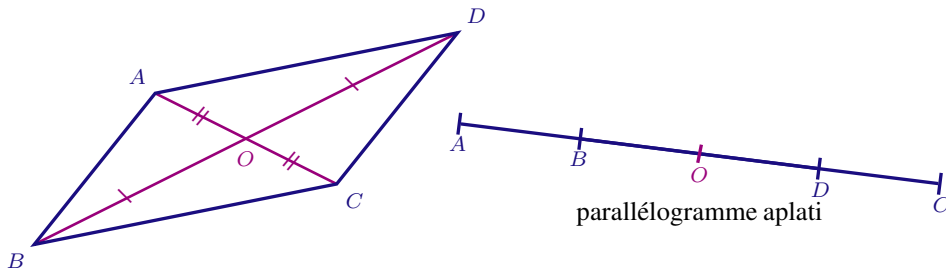
Définition 1

- Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles ;
- *In Euclidean geometry, a parallelogram is a simple (non-self-intersecting) quadrilateral with two pairs of parallel sides.*

I.1.2 Propriétés

Propriété 1 (Caractérisation 1)

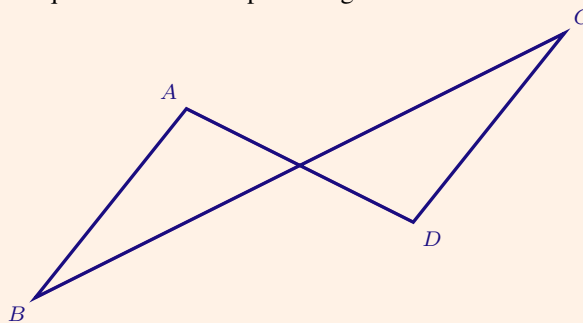
Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu.
(*The diagonals bisect each other.*)

**Propriété 2** (Caractérisation 2)

Un quadrilatère non croisé est un parallélogramme si, et seulement si les côtés opposés ont la même longueur.

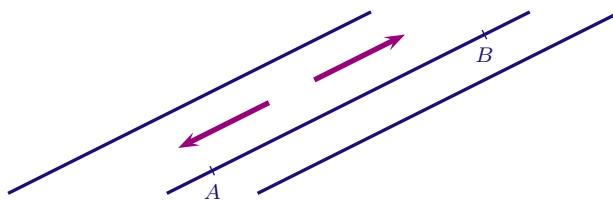
**Remarque**

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



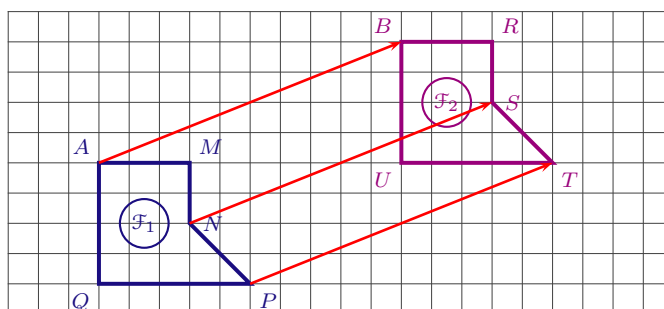
Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

I.2 Sens et direction



- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.
- Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB) , il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B , soit de B vers A .

I.3 Translation



Le glissement qui permet d'obtenir la figure \mathcal{F}_2 à partir de la figure \mathcal{F}_1 peut être décrit de façon précise par trois caractères :

- la direction du glissement est donnée par la droite (AB) ;
- le sens du glissement est celui de A vers B ;
- la distance du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.

On dit que la figure \mathcal{F}_2 est l'image de la figure \mathcal{F}_1 par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .



Remarque

Les vecteur \overrightarrow{NS} et \overrightarrow{PT} sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur \overrightarrow{AB} , on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{PT}$$

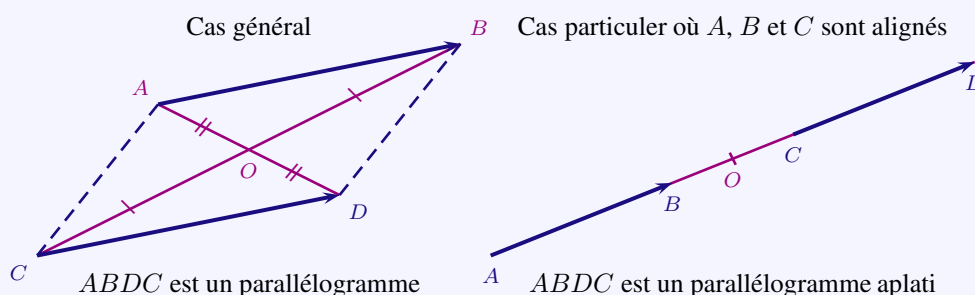
I.3.1 Définition

Théorème 1

Soient A et B deux points du plan.

La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.

Cette translation est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .



II. Vecteurs

II.1 Définitions

Définition 2

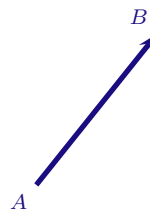
Un couple (A, B) de points du plan détermine un vecteur.
 A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note \overrightarrow{AB} .

Un vecteur \overrightarrow{AB} est donc caractérisé par 3 éléments (*deux seulement en anglais!*)

1. Sa norme, la distance AB que l'on note :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

2. Sa direction, inclinaison de la droite (AB) ;
3. Son sens, de A vers B .



Remarque

On rappelle que dans un repère orthonormé on a :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Définition 3 (Vecteur nul)

On appelle vecteur nul le vecteur associé par exemple à la translation qui transforme A en A :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$



a Vector in english

Attention, en anglais un *vector* est défini seulement par sa *magnitude* (norme) et sa *direction* (direction+sens). La *direction* en anglais est en fait l'angle que forme le vecteur avec le x -axis.

- *The direction of a vector is the angle made by the vector with the horizontal axis, that is, the X-axis. The direction of a vector is given by the counterclockwise rotation of the angle of the vector about its tail due east.*
- *A Euclidean vector or simply a vector (sometimes called a geometric vector or spatial vector) is a geometric object that has magnitude (or length) and direction.*

II.2 Égalité de deux vecteurs

Définition 4

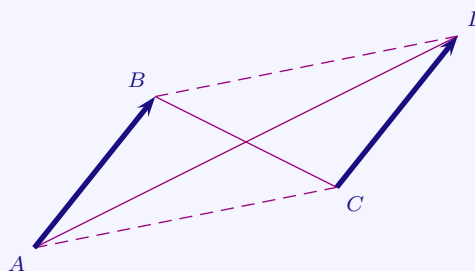
Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.

II.2.1 Définition

Théorème 2

A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

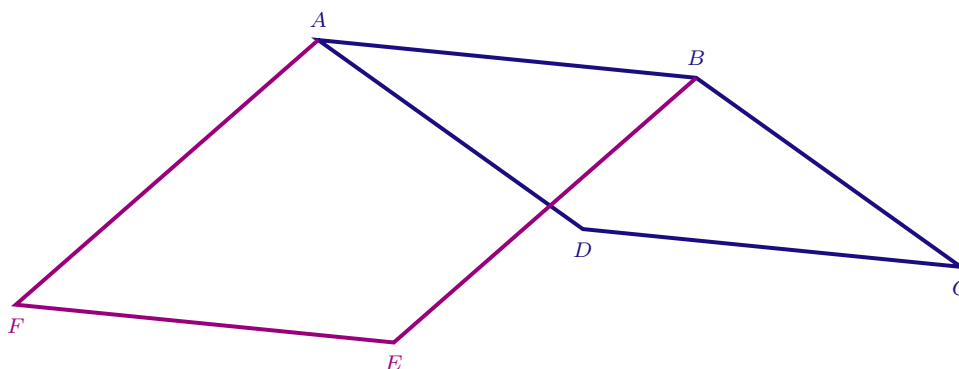
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.
Attention à l'ordre, c'est $ABDC$.



Exercice 1

Exemple : les trois parallélogrammes

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



Preuve

- $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 - $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$.
- Par conséquent, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

II.3 Représentation d'un vecteur

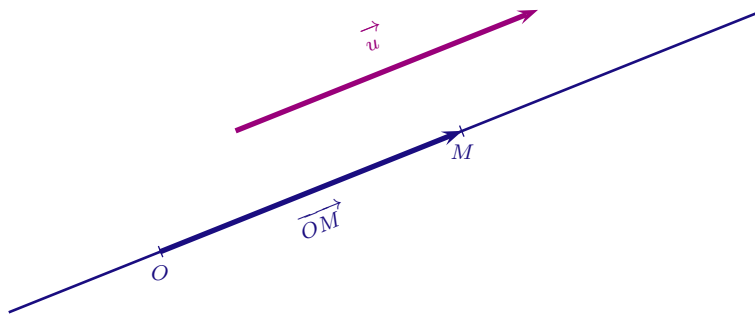
Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \dots$, on dit que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{FE} , ... sont des représentants du vecteur \vec{u} :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \dots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Théorème 3

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



Si \vec{u} n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur \vec{u} est caractérisé par :

- Sa direction : c'est celle de la droite (OM) .
- Son sens : c'est le sens de O vers M .
- Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM .

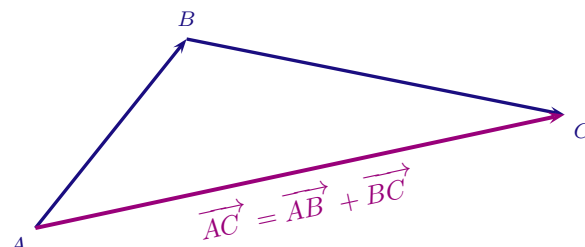
III. Addition vectorielle

III.1 Somme de deux vecteurs

Soit trois points A, B et C .

Si on applique la translation de vecteur \overrightarrow{AB} suivie de la translation de vecteur \overrightarrow{BC} , on obtient la translation de vecteur \overrightarrow{AC} .

Le vecteur \overrightarrow{AC} est la somme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC}



III.1.1 Relation de Chasles

Théorème 4

Quels que soient les points A, B et C on a :

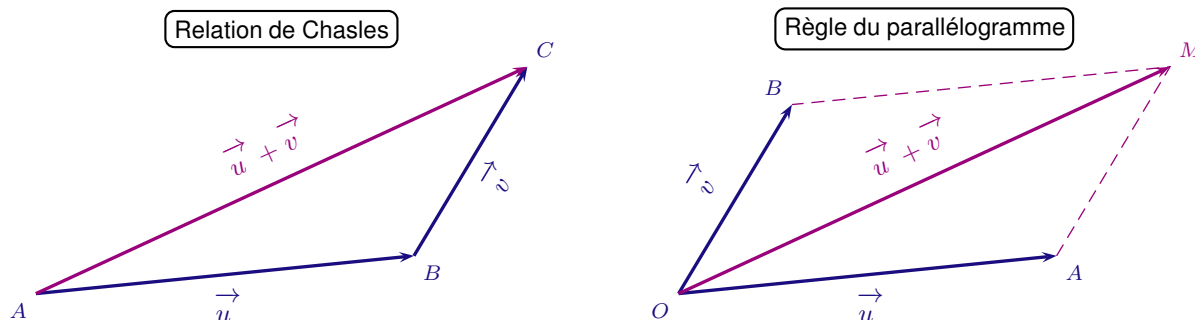
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

III.1.2 Règle du parallélogramme

Théorème 5

La somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est le vecteur \overrightarrow{OM} tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

III.1.3 Construction de la somme de deux vecteurs



III.1.4 Propriétés algébriques

Théorème 6

Quels que soient les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w}

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

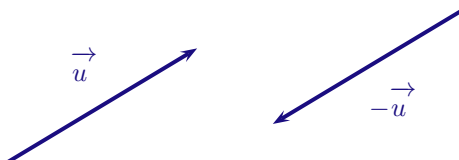
III.2 Différence de deux vecteurs

III.2.1 Opposé d'un vecteur

Théorème 7

L'opposé d'un vecteur \vec{u} est le vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Le vecteur opposé a donc la même norme, la même direction mais un sens opposé.



Théorème 8

L'opposé du vecteur \overrightarrow{AB} est le vecteur \overrightarrow{BA} :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$



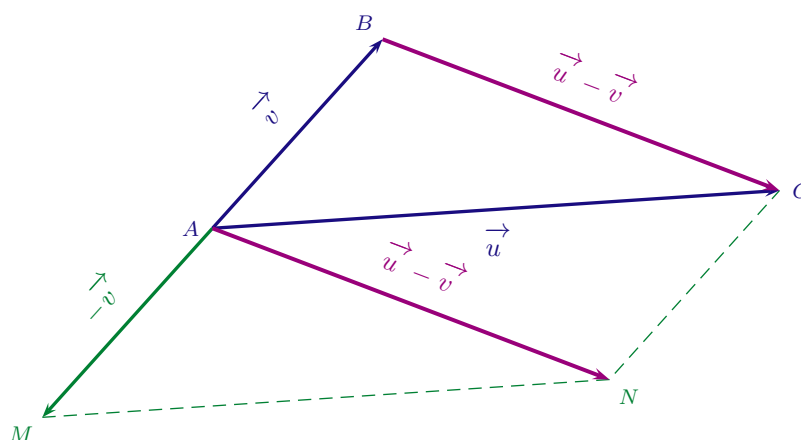
Preuve

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

III.2.2 Définition

Théorème 9

Étant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} la différence $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

III.3 Milieu d'un segment et égalité vectorielle

Propriété 3

Pour tous points distincts du plan A et B :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \text{ si, et seulement si, } M \text{ est le milieu de } [AB].$$



Preuve

$$\begin{aligned}
 M \text{ est le milieu de } [AB] &\iff M \in [AB] \text{ et } AM = MB \\
 &\iff \text{les points A, M et B sont alignés dans cet ordre et } AM = MB \\
 &\iff \begin{aligned} &\text{- les droites } (AM) \text{ et } (MB) \text{ sont parallèles} \\ &\text{- le sens de A vers M est aussi celui de M vers B} \\ &\text{- et } MA = MB \end{aligned} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}
 \end{aligned}$$

IV. Coordonnées

IV.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 5

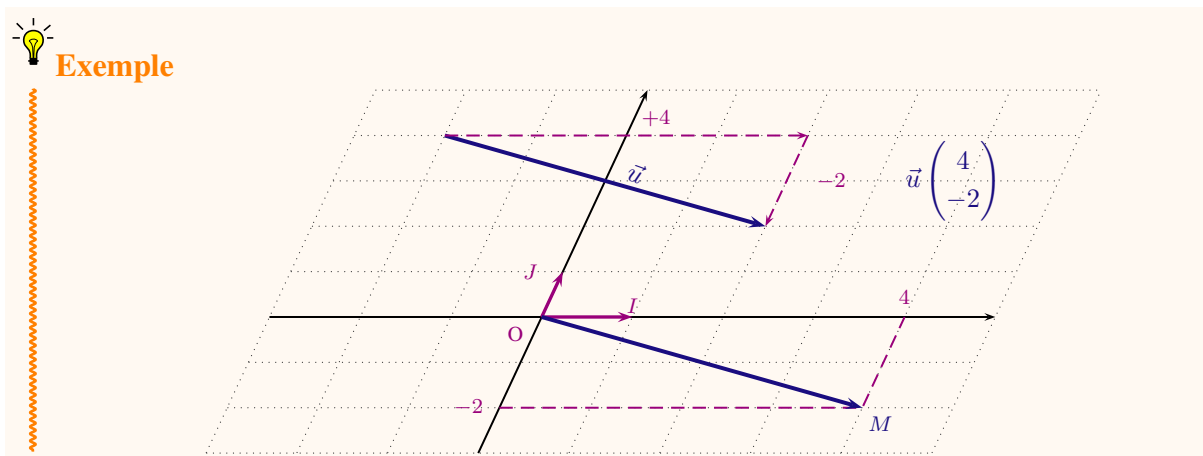
Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. Soit \vec{u} un vecteur.

On appelle coordonnées du vecteur \vec{u} les coordonnées du point $M(x; y)$ dans le repère $(O; I; J)$ tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple



Remarque

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

IV.1.1 Propriétés des coordonnées

Définition 6

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs :

- Vecteur nul :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Égalité de deux vecteurs : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si leurs coordonnées sont égales.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

- Somme de deux vecteurs : Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.



Exemple

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

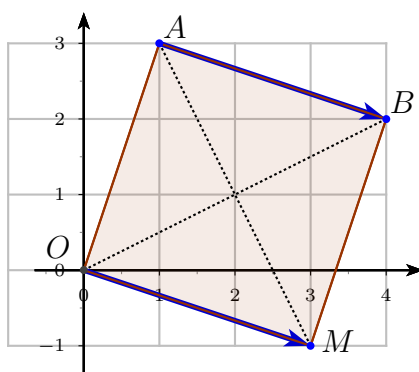
IV.2 Coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB}

Théorème 10

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
 Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} dans le repère $(O; I; J)$ sont :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Mémo : 2^{ème} point - 1^{er} point



Preuve

Par définition, si le vecteur \overrightarrow{AB} est de coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cela signifie que le point $M(x; y)$ est l'image de l'origine du repère O par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

De ce fait le quadrilatère $OABM$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu. On a donc :

$$mil[AM] = mil[OB] \iff \begin{cases} \frac{x_A + x}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y}{2} = \frac{0 + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_B - x_A \\ y = y_B - y_A \end{cases}$$



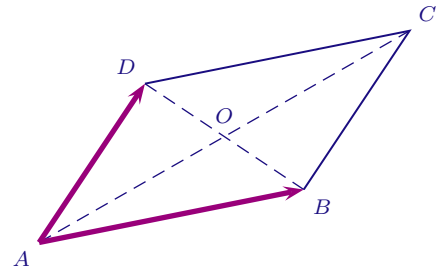
Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Dans le repère $(A ; B ; D)$, déterminez les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} :



Preuve

$$\begin{cases} A(0 ; 0) \\ B(1 ; 0) \\ C(1 ; 1) \\ D(0 ; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Dans le repère $(O ; A, B)$, déterminez les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} :



Preuve

$$\begin{cases} A(1 ; 0) \\ B(0 ; 1) \\ C(-1 ; 0) \\ D(0 ; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

