



Vecteurs - Partie 2 (et colinéarité) (élève)

Seconde

On se place dans ce cours dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I. Multiplication d'un vecteur par un réel

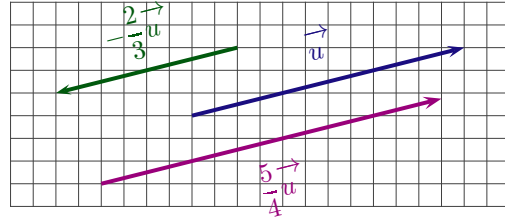
I.1 Produit d'un vecteur par un réel k

Définition 1

k désigne un réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$.

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ est indépendant du repère.



Exemple

Par exemple si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors le vecteur $\vec{v} = 5\vec{u}$ est de coordonnées $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Propriété 1

Soit k un nombre réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. on a :

$$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

2. si $k > 0$, alors \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même direction, de même sens.

3. si $k < 0$, alors \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même direction, de sens contraire.



Preuve

1. Dans le RON (O, \vec{i}, \vec{j}) puisque $k\vec{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, on a :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. si $k > 0$, alors \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même direction, de même sens. En effet Si \vec{u} est un vecteur directeur d'une droite d , alors $k\vec{u}$ aussi. Donc \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même direction et de même sens.

3. si $k < 0$, alors \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même direction, de sens contraire. Idem ...

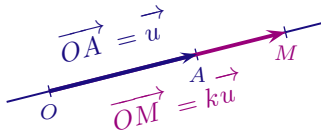
Définition 2 (Une autre définition)

Soit \vec{u} un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).

Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k , noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

- sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur \vec{u} ;

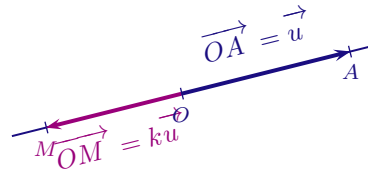
Cas où $k > 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur \vec{u} ;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur \vec{u} par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur \vec{u} ;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur \vec{u} par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Définition 3

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

I.2 Propriétés algébriques

Théorème 1

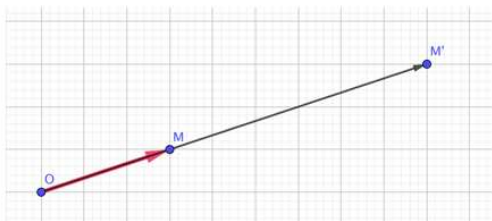
Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous réels k et k' :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} ; \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u} ; \quad k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

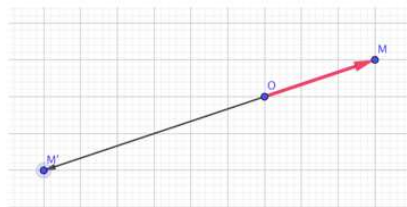
I.3 Définition vectorielle d'une homothétie

Définition 4

On se donne un point O et un réel k non nul.
 L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation du plan qui, à tout point M , associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



Homothétie de rapport 3



Homothétie de rapport -2



Exercice 1

Où est le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$?

I.4 Décomposition d'un vecteur dans une base

Propriété 2

\vec{u} a pour coordonnées $(x ; y)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) si et seulement si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Preuve

Dans le RON (O, \vec{i}, \vec{j}) , le vecteur $x\vec{i}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, et le vecteur $y\vec{j}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Donc si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ses coordonnées sont $(x ; y)$ et la réciproque est immédiate.

II. Vecteurs colinéaires

II.1 Définition

Théorème 2

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$



Remarque

- Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

II.2 Déterminant de deux vecteurs

Définition 5

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$.
Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le **déterminant** des deux vecteurs.

$$\det \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

II.3 Condition de colinéarité : Déterminant

Théorème 3 (Admis (Démontré en TD))

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\det \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = 0 \iff xy' - x'y = 0$$

Remarque : Preuve Ex. 73 sera proposée en TD.



Exercice 2

| Soit $A(1 ; 2)$, $B(-1 ; 3)$, $C(1 ; 4)$, $D(5 ; -2)$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont-ils colinéaires ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Applications géométriques

III.0.1 Avec les milieux

Théorème 4 (milieu d'un segment)

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

- 1) $\vec{AI} = \vec{IB}$ ou 2) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ou 3) $\vec{AB} = 2\vec{AI}$.
- 4) Pour tout point M du plan $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.



Preuve

1. L'égalité $\vec{AI} = \vec{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).

2. I milieu du segment $[AB] \iff \vec{AI} = \vec{IB} \iff \vec{IA} = -\vec{IB} \iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

3. I milieu du segment $[AB] \iff \vec{AI} = \vec{IB}$ Donc d'après Chasles :

$$\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB} + 2\vec{AI}$$

4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Théorème 5

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Compléments

IV. Coordonnées du milieu d'un segment (une autre preuve)

Théorème 7

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu $I(x_I; y_I)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

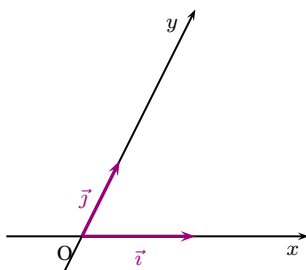
Preuve.

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$ soit $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

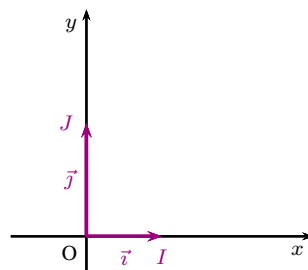
V. Repère du plan

Théorème 8

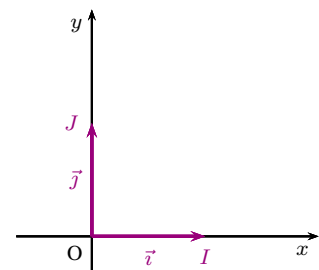
On appelle base tout couple (\vec{i}, \vec{j}) de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et (\vec{i}, \vec{j}) une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal
 $(OI) \perp (OJ)$



Repère orthonormé
 $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

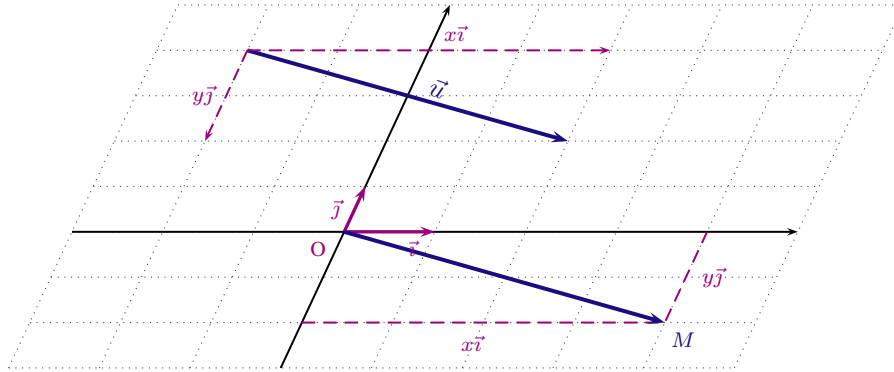
VI. Coordonnées d'un vecteur

Théorème 9

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit \vec{u} un vecteur.

On appelle coordonnées du vecteur \vec{u} les coordonnées du point $M(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Définition 6

- $(x; y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

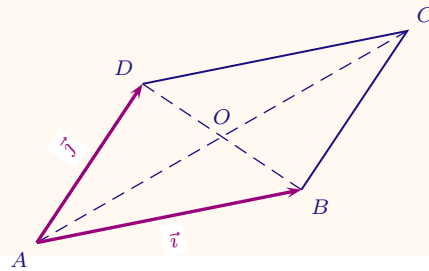


Exemple

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

$A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1)$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j}$

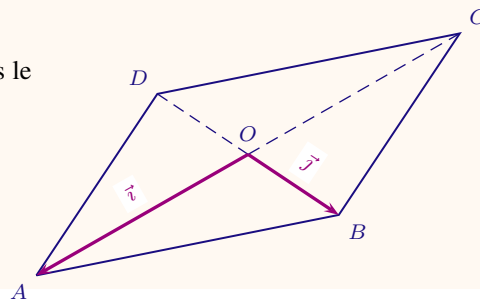


Exemple

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:

$A(1; 0), B(0; 1), C(-1; 0), D(0; -1)$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\vec{i}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\vec{j}$



↔ Fin du cours ↔