Math93.com

Vecteurs - Partie 2 (et colinéarité)

Seconde

On se place dans ce cours dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

I. Multiplication d'un vecteur par un réel

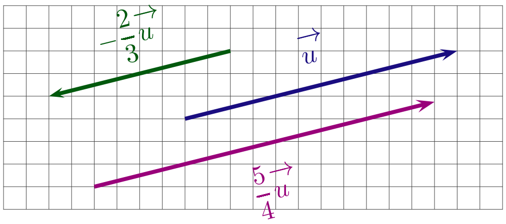
I.1 Produit d'un vecteur par un réel k

Définition 1

k désigne un réel et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$.

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ est indépendant du repère.



Exemple

Par exemple si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors le vecteur $\vec{v} = 5\vec{u}$ est de coordonnées $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Propriété 1

Soit k un nombre réel et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. on a :

$$\left\|k\vec{u}\right\| = |k| \times \left\|\vec{u}\right\|$$

2. si $k > 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction, de même sens.

3. si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction, de sens contraire.

Preuve

1. Dans le RON $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$puisque $k\vec{u}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|k\vec{u}\right\| &= \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} \\
&= \sqrt{k^2\left(x^2 + y^2\right)} \\
&= \sqrt{k^2} \times \sqrt{x^2 + y^2} \\
\left\|k\vec{u}\right\| &= |k| \times \left\|\vec{u}\right\|
\end{aligned}$$

2. si $k > 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction, de même sens. En effet Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, alors $k\vec{u}$ aussi. Donc $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction et de même sens.

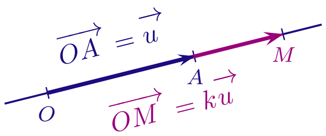
3. si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction, de sens contraire. Idem ...

Définition 2 (Une autre définition)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k, noté $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur caractérisé par :

- sa direction : $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{u}$;

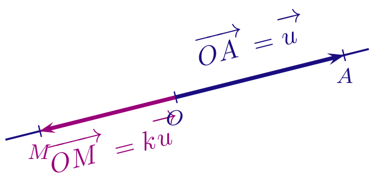
Cas où $k > 0$



- son sens : le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a le même sens que le vecteur $\overrightarrow{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\overrightarrow{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k

$$\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = k \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$$

Cas où $k < 0$



- son sens : le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\overrightarrow{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\overrightarrow{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'opposé du réel k

$$\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = -k \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

Définition 3

Lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$: ainsi, l'égalité $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ne peut se produire que lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$.

I.2 Propriétés algébriques

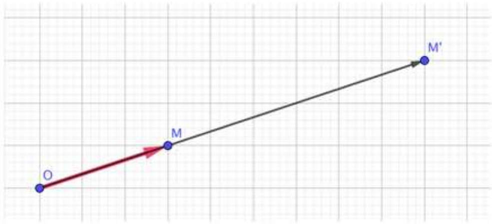
Théorème 1

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$; $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$; $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

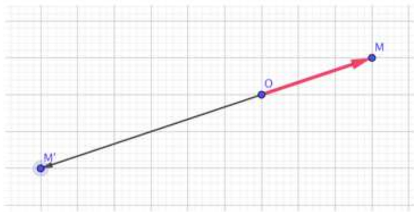
I.3 Définition vectorielle d'une homothétie

Définition 4

On se donne un point O et un réel k non nul.
L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



Homothétie de rapport 3



Homothétie de rapport -2

Exercice 1

Où est le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$?

I.4 Décomposition d'un vecteur dans une base

Propriété 2

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ **si et seulement si** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Preuve

Dans le RON $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, le vecteur $x\overrightarrow{i}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, et le vecteur $y\overrightarrow{j}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.
Donc si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ses coordonnées sont $(x\ ;\ y)$ et la réciproque est immédiate.

II. Vecteurs colinéaires

II.1 Définition

Théorème 2

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$

Remarque

- Comme $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

II.2 Déterminant de deux vecteurs

Définition 5

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$.
Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le **déterminant** des deux vecteurs.

$$det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

II.3 Condition de colinéarité : Déterminant

Théorème 3 (Admis (Démontré en TD))

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = 0 \iff xy' - x'y = 0$$

Remarque : Preuve Ex. 73 sera proposée en TD.

Exercice 2

Soit $A(1\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(1\ ;\ 4)$, $D(5\ ;\ -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

III. Applications géométriques

III.0.1 Avec les milieux

Théorème 4 (milieu d'un segment)

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

4) Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Preuve

1. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).

2. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$

3. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ Donc d'après Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{AI}$$

4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M /

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\overrightarrow{0}} = 2\overrightarrow{MI}$$

Réciproquement, la propriété $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I. Soit :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \overrightarrow{0}$$

Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

Théorème 5

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Preuve

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

Or I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ donc d'après ce qui précède : $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} \\ &= 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) \\ &= 2\overrightarrow{IJ} \end{aligned}$$

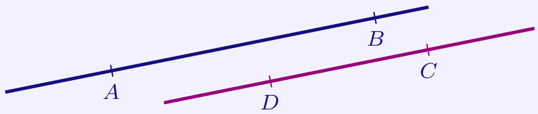
III.0.2 Parallélisme et alignement

Théorème 6

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve

- Si $(AB)//(CD)$ alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc ils sont colinéaires.



  Réciproquement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB)//(CD)$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie donc $(AB)//(AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

Exercice 3

Soit $A(1\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(1\ ;\ 4)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Compléments

IV. Coordonnées du milieu d'un segment (une autre preuve)

Théorème 7

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et deux points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.
Les coordonnées du milieu $I\,(x_I; y_I)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

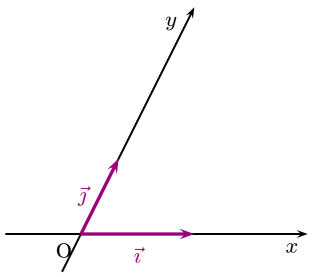
Preuve.

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ soit $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

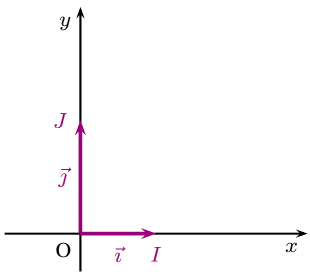
V. Repère du plan

Théorème 8

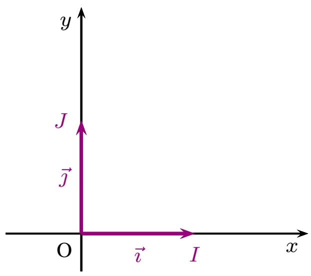
On appelle base tout couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal
$(OI) \perp (OJ)$



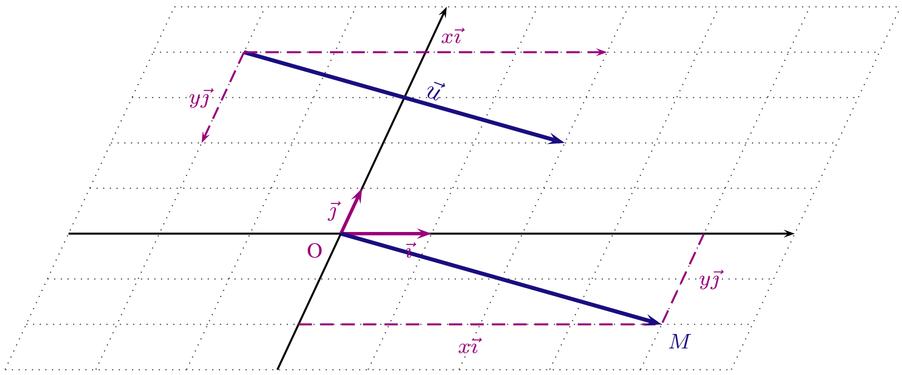
Repère orthonormé
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

VI. Coordonnées d'un vecteur

Théorème 9

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M\,(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}\,(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

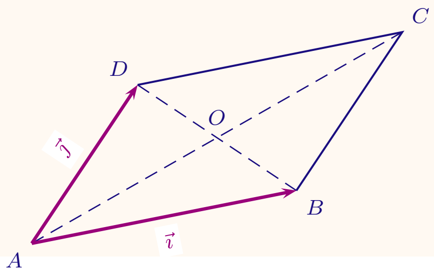


Définition 6

- $(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

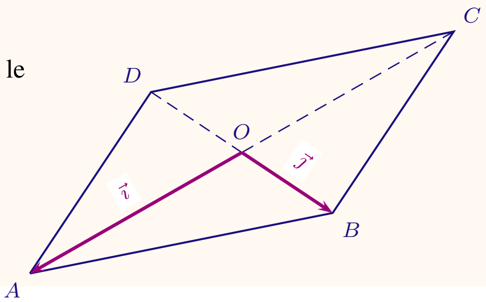
Exemple

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$:
$A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}$



Exemple

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:
$A(1\,;\,0)$, $B(0\,;\,1)$, $C(-1\,;\,0)$, $D(0\,;\,-1)$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = -2\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = -2\vec{\jmath}$



Fin du cours