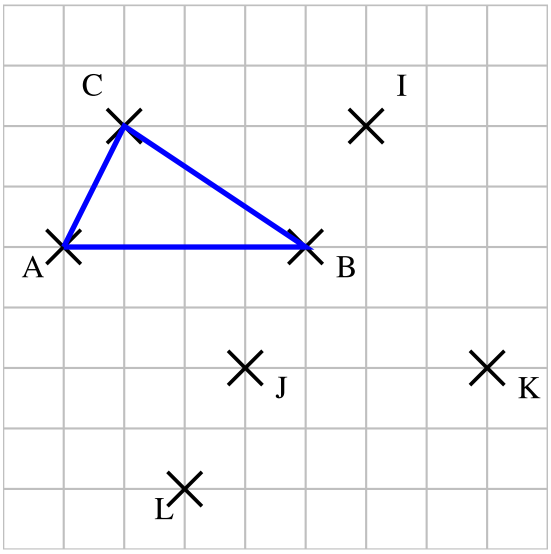
Math93.com

Devoir Surveillé n°7 Correction

Vecteurs

Durée 1,5 heure - Coeff. 8
Noté sur 40 points

Exercice 1. Construction et démonstration — 10 points



1. **[3 points]** Construire les points I, J, K et L définis par :

1. a. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

1. b. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

1. c. $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

1. d. $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$;

2. **[3 points] En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} \\
&= \left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}\right) + \left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \\
\overrightarrow{JK} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}}$$

3. **[3 points] Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.**

Par construction, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc le quadrilatère ABIC est un parallélogramme et de ce fait, $\boxed{\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}}$.

4. **[1 point]** On a montré que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JK}$, soit $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JK}$ et donc le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.

5. **Bonus* [2 points]** Démontrer que les points I, B, J et L sont alignés.

Exercice 2. Michel Chasles (1793-1880) est votre ami ! — 11 points

1. **[2 points]** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$;

2. **[2 points]** : $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$;

3. **[3 points]** : $\overrightarrow{FG} - \left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}\right) - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB}\right) = \overrightarrow{BF}$;

4. **[4 points]** : $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$;

Exercice 3. Vecteurs et coordonnées — 11 points

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $D\,(-2\,;\,4)$, $E\,(-1\,;\,1)$ et $F\,(5\,;\,4)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.

2. **[6 points]** On considère les points R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{DR} = 4\,\overrightarrow{DE} \quad , \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} \quad , \quad \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$$

Les coordonnées des points R, S et T sont :

$$\boxed{R\,(2\,;\,-8)}, \boxed{S\,(1,5\,;\,4)} \text{ et } \boxed{T\,(1\,;\,2)}.$$

3. **[2 points] Démontrer que les droites (ST) et (FR) sont parallèles**.
$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0,5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$ donc de façon évidente $\boxed{\overrightarrow{FR} = 6\overrightarrow{ST}}$ ce qui montre la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{ST}$. Les droites (ST) et (FR) sont donc parallèles.

4. **[1 point]** Montrer que les coordonnées du milieu K du segment [DR] sont $K\,(0\,;\,-2)$.

5. **[2 points]** On a :

$$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0,5\\-2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires car

$$\overrightarrow{TK} = 2\overrightarrow{ST}$$

et donc les points S, T et K sont alignés.

Exercice 4. Vecteurs et coordonnées — 8 points

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A\,(-1\,;\,-2)$, $B\,(5\,;\,-1)$, $C\,(6\,;\,3)$ et $D\,(0\,;\,2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.

2. **[2 points] Démontrer que ABCD est un parallélogramme**.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ ce qui montre que ABCD est un parallélogramme.

3. **[1 point]** Construire le point E tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

4. **[2 points]** Le point E est de coordonnées $\boxed{E\,(4\,;\,-5)}$.

5. **[2 points]** On a $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}}$$

6. **[1 point]** Le point B est donc le milieu du segment [EC] puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.

- Fin du devoir -