Math93.com

Devoir Surveillé n°1
Correction

Seconde
Notion de fonction
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé. La maitrise de la langue et la présentation rapporteront 1 point

Exercice 1. Intervalles (A compléter sur cette feuille) — 2 points

On considère les intervalles suivants : $A = \left]2\ ;\ +\infty\right[\quad ; \quad B = \left]-\infty\ ;\ 3\right] \quad ; \quad C = \left]-5\ ;\ 4\right]$.

A compléter sur cette feuille

1. $\boxed{A \cap C =]2\ ;\ 4]}$

2. $\boxed{B \cup C =]-\infty\ ;\ 4]}$

3. $\boxed{B \cap C =]-5\ ;\ 3]}$

4. $\boxed{B \cup A =]-\infty\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}}$

5. $\boxed{A \cup C =]-5\ ;\ +\infty[}$

6. $\boxed{B \cap A =]2\ ;\ 3]}$

Exercice 2. Intervalles (A compléter sur cette feuille) — 2 points

A compléter sur cette feuille

Compléter avec les symboles $\in$ ou $\notin$:

1. $\sqrt{2} \notin \left]-5\ ;\ 1,4\right]$

2. $\sqrt{3} \in \left]1,7\ ;\ 5\right]$

3. $4,999 \in \left]4\ ;\ 5\right[$

4. $100,01 \notin \left]10^{-2}\ ;\ 10^{2}\right]$

5. $\pi \notin \left]0\ ;\ 3,14\right]$

6. $-5 \in \left]-5,1\ ;\ 10\right]$

Exercice 3. Vrai ou faux — 2 points

Affirmation 1 (Fausse)

Le produit d'un entier naturel non nul et d'un nombre irrationnel peut être un entier naturel.

Preuve
Soit n un entier non nul et x un nombre irrationnel. Supposons alors que le produit de n par x soit un entier naturel m, on a alors puisque n est différent de zéro :

$$n \times x = m \iff x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

De ce fait le nombre x est alors rationnel ce qui est contraire aux données.
L'affirmation 1 est donc fausse, on peut affirmer que le produit d'un entier naturel non nul et d'un nombre irrationnel ne peut jamais être un entier naturel.

Affirmation 2 (Vraie)

On a l'égalité

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$$

Preuve

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} &= \frac{(1+\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})}\\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{-1}\end{aligned}$$

Donc l'affirmation 2 est vraie :

$$\boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}-3}$$

Exercice 4. Une fonction ... algébrique — 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3x^2+3x+6$$

1. Déterminer l'image de $\left(1+\sqrt{3}\right)$ par f sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned}f\left(1+\sqrt{3}\right) &= -3\left(1+\sqrt{3}\right)^2+3\left(1+\sqrt{3}\right)+6\\ &= -3\left(1+2\sqrt{3}+3\right)+3+3\sqrt{3}+6\\ &= -3-6\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}+9\end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(1+\sqrt{3}\right) = -3-3\sqrt{3}}$$

2.

2. a. Pour tout réel x on a :

$$-3(x-2)(x+1) = -3\left(x^2+x-2x-2\right) = -3\left(x^2-x-2\right) = -3x^2+3x+6 = f(x)$$

et donc

$$\boxed{f(x) = -3(x-2)(x+1)}$$

2. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$, avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.
D'après la question 2a) on a donc

$$f(x) = 0 \iff -3(x-2)(x+1) = 0$$

C'est une équation produit nul donc :

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff \left(x-2=0\right) \text{ ou } \left(x+1=0\right)\\ f(x) = 0 &\iff \left(x=2\right) \text{ ou } \left(x=-1\right)\end{aligned}$$

Les deux solutions sont donc $x=2$ et $x=-1$.
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont donc les points $\boxed{A(-1\,;\,0) \text{ et } B(2\,;\,0)}$

3. Déterminer les antécédents de 6 par f.

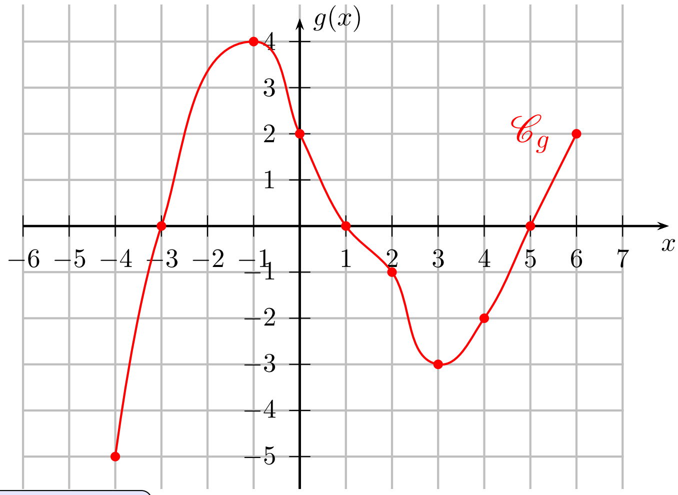
Il faut pour cela utiliser la première expression de $f(x)$ car les antécédents de 6 par f sont les solutions réelles de l'équation $f(x) = 6$ soit :

$$\begin{aligned}f(x) = 6 &\iff -3x^2+3x+6 = 6\\ &\iff -3x^2+3x = 0\\ &\iff -3x\left(x-1\right) = 0\\ &\iff \left(x=0\right) \text{ ou } \left(x=1\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les antécédents de 6 par } f \text{ sont donc 0 et 1}}$.

Exercice 5. Une fonction ... graphique — 5 points

On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.



A compléter sur cette feuille (3,5 points)

1. L'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g est $\boxed{\mathscr{D}_g = [-4\ ;\ 6]}$.

2. L'image par la fonction g de -4 est $\boxed{g(-4) = -5}$, et celle de 4 est $\boxed{g(4) = -2}$

3. Les antécédents par g de -3 sont : 3 et environ $-3,7$

4. L'ensemble E des réels qui ont une image positive par la fonction g est : $\boxed{E = [-3\ ;\ 1] \cup [5\ ;\ 6]}$

5. Le maximum de g sur son ensemble de définition est 4, il est atteint en $x = -1$.
Le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition est -5, il est atteint en $x = -4$.

6. L'ensemble F des réels qui ont exactement 3 antécédents par la fonction g est $\boxed{F =]-3\ ;\ 2]}$.

7. Tableau de variation (1,5 point).

7. a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

x	-4		-1		3		6
$g(x)$	-5	↗	4	↘	-3	↗	2

7. b. Donner sur votre copie double un encadrement de $g(x)$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.

$$\boxed{x \in [-4\ ;\ 3] \Longrightarrow -5 \leq g(x) \leq 4}$$

Exercice 6. Tableau de variation $2 \times 0,5 + 4 \times 1 = 5$ points

x	-4		0		1		5
Variations de h	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4

Pour cet exercice, excepté à la question 5°), on ne demandait pas de justification rigoureuse (cela est impossible à notre niveau, attendons la terminale pour cela). La correction qui suit propose juste une explication des résultats obtenus, au niveau seconde.

1. $\boxed{\text{Si } x \in [-4~;~1], \text{ alors } -6 \leq h(x) \leq -1}$.

2. **Extrema**.
   - **Le maximum** de h sur son ensemble de définition est 4, il est atteint pour $x = 5$.
   - **Le minimum** de h sur son ensemble de définition est -6, il est atteint pour $x = -4$.

3. On a vu à la question **(1.)** que si $x \in [-4~;~1]$, alors $-6 \leq h(x) \leq -1 < 0$ et donc $f(x)$ est strictement négatif sur $[-4~;~1]$.

4. **Combien l'équation $h(x) = 0$ a-t-elle de solution sur l'intervalle $[-4~;~5]$?**
On a vu à la question 3°) que $f(x)$ est strictement négatif sur l'intervalle $[-4~;~1]$ et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[1~;~5]$ la fonction h est strictement croissante avec $h(1) = -3 < 0$ et $h(5) = 4 > 0$. Il est donc alors naturel de conjecturer l'existence d'une solution notée α de l'équation $h(x) = 0$ sur $[1~;~5]$.
Conclusion : $h(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[-4~;~5]$.

5. **Comparer $h(0,2)$ et $h(0,5)$. Justifier votre réponse**.
Les réels $0,2$ et $0,5$ appartiennent à l'intervalle $[1~;~5]$ sur lequel la fonction h est strictement décroissante.
Puisque $0,2 < 0,5$ on a du fait de la décroissance de h sur $[1~;~5]$, $\boxed{h(0,2) > h(0,5)}$.

6. **Combien le réel -2 a-t-il d'antécédents par h ?**
On observe dans chaque intervalles du tableau de variation, si -2 possède un antécédent par h.
   - Sur $[-4~;~0]$: h est croissante avec $\begin{cases} h(-4) = -6 < -2 \\ h(0) = -1 > -2 \end{cases}$, donc -2 a un antécédent sur $[-4~;~0]$.
   - Sur $[0~;~1]$: h est décroissante avec $\begin{cases} h(1) = -3 < -2 \\ h(0) = -1 > -2 \end{cases}$, donc -2 a un antécédent sur $[0~;~1]$.
   - Sur $[1~;~5]$: h est croissante avec $\begin{cases} h(1) = -3 < -2 \\ h(5) = 4 > -2 \end{cases}$, donc -2 a un antécédent sur $[1~;~5]$.

En conséquence, $\boxed{-2 \text{ a trois antécédents par } h}$.

Bonus (difficile)
Dans l'exercice 4, déterminer les antécédents de 3 par f.

$$\begin{aligned}
f(x) = 3 &\iff -3x^2 + 3x + 6 = 3 \\
&\iff -3x^2 + 3x + 3 = 0 \\
&\iff -3\left(x^2 - x - 1\right) = 0 \\
&\iff -3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right] = 0 \\
&\iff -3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = 0 \\
&\iff -3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 0 \\
&\iff -3\left[\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

On obtient une équation produit nul donc

$$f(x) = 3 \iff \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0\right) \text{ ou } \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0\right)$$

$$f(x) = 3 \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}~;~\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$