



Math93.com

Devoir Surveillé n°4 Correction

Seconde

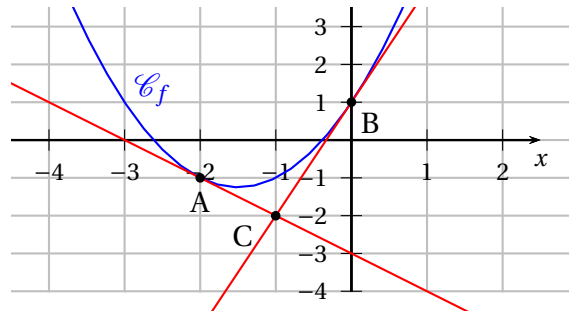
Bilan 1

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 40 points

Exercice 1. QCM A : (B - C - D)

3 points



On a tracé \mathcal{C}_f , la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} ainsi que les tangentes à \mathcal{C}_f aux points $A(-2; -1)$ et $B(0; 1)$.

Question 1 (Réponse b)

L'équation de la droite (AC), la tangente à \mathcal{C}_f en $A(-2; -1)$ est :

a. $y = x - 3$

b. $y = -x - 3$

c. $y = 3x - 3$

d. $y = -3x - 3$

Question 2 (Réponse c)

Le coefficient directeur de la droite (BC) est :

a. -2

b. 2

c. 3

d. $\frac{1}{3}$

Question 3 (Réponse d)

La fonction f est négative sur :

a. $[-4; 0]$

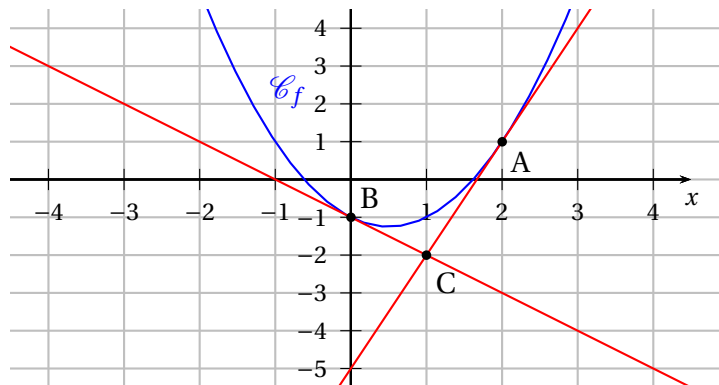
b. $[0; 2]$

c. $[-1; 1]$

d. $[-2; -1]$

Exercice 1. QCM B : (A - B - A)

3 points



On a tracé \mathcal{C}_f , la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} ainsi que les tangentes à \mathcal{C}_f aux points $A(2; 1)$ et $B(0; -1)$.

Question 4 (Réponse a)

Le coefficient directeur de la droite (BC) est :

a. -1

b. 1

c. 2

d. -2

Question 5 (Réponse b)

La fonction f est négative sur :

a. [-4; 0]

b. [0; 1]

c. [-1; 1]

d. [-2; -1]

Question 6 (Réponse a)

L'équation de la droite (AC), la tangente à \mathcal{C}_f en $A(2; 1)$ est :

c. $y = 3x - 5$

a. $y = \frac{1}{3}x + 1.5$

b. $y = -3x - 5$

d. $y = 3x + 1.5$

Exercice 2. Lectures Graphique A et B

1 points

Juste par lecture graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f de l'exercice 1A.

x	$-\infty$	≈ -1.5	$+\infty$
Variations de f			

Juste par lecture graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f de l'exercice 1B.

x	$-\infty$	≈ 0.5	$+\infty$
Variations de f			

Exercice 3. Un peu de géométrie**10 points**

1. [1 point] On considère dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessus les points $A(-4; 1)$ et $B(6; -1)$. Déterminer les coordonnées du point C , milieu du segment $[AB]$. Vérifier que C appartient à l'axe des abscisses.

$$\begin{cases} A(-4; 1) \\ B(6; -1) \end{cases} \left| \Rightarrow C\left(\frac{-4+6}{2}; \frac{1-1}{2}\right) \Rightarrow \underline{C(1; 0)}$$

Le point C est d'ordonnée nulle, donc il appartient bien à l'axe des abscisses.

2. [1 point] Construire le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, et donc de centre C . : 1 point pour toute la construction.

3. [1.5 point] Montrer que le rayon du cercle \mathcal{C} est de $\sqrt{26}$ u.l. (unités de longueur).

On est dans un repère orthonormé donc le calcul des longueurs est légitime. On a :

$$\begin{cases} A(-4; 1) \\ C(1; 0) \end{cases} \left| \Rightarrow AC = \sqrt{(1+4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{26} \text{ u.l.}$$

Donc le rayon du cercle \mathcal{C} qui est égale au demi-diamètre AB vaut :

$$r = AC = \underline{\sqrt{26} \text{ u.l.}}$$

4. [1.5 point] Le cercle \mathcal{C} coupe l'axe des ordonnées en deux points. On note E le point dont l'ordonnée est positive. Placer E sur le graphique et montrer que ses coordonnées sont : $E(0; 5)$.

Le point E étant le point d'intersection du cercle et de l'axe (Oy) dont l'ordonnée est positive on a $E(0; OE)$. De plus le repère étant orthonormé, le triangle EOC est rectangle en O puisque les points E et C appartiennent respectivement aux axes (Oy) et (Ox) .

Puisque le point E appartient au cercle \mathcal{C} , d'après la question précédente on a :

$$EC = \sqrt{26} \text{ u.l.}$$

De ce fait, d'après le théorème de Pythagore dans EOC le triangle rectangle en O on a :

$$EO^2 = EC^2 - OC^2 = 25$$

Or EO est positif, donc $EO = 5$ u.l. et les coordonnées du point E sont alors : $\underline{E(0; 5)}$.

5. [1 point] Démontrer que le triangle ABE est rectangle en E .

Le point E appartient au cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, en étant distinct des points A et B , donc le triangle ABE est rectangle en E .

6. [2 points] Montrer que l'aire \mathcal{A} du triangle ABE est égale à : $\mathcal{A} = 24$ u.a.

Le triangle AEB étant rectangle en E , son aire peut se calculer en effectuant le demi-produit des longueurs des côtés perpendiculaires soit :

$$\mathcal{A} = \frac{EA \times EB}{2}$$

Or dans le repère orthonormé on a :

$$\begin{cases} A(-4; 1) \\ B(6; -1) \\ E(0; 5) \end{cases} \left| \Rightarrow \begin{cases} EA = \sqrt{(-4-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{32} \text{ u.l.} \\ EB = \sqrt{(6-0)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{72} \text{ u.l.} \end{cases}$$

D'où :

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{72}}{2} = \underline{24 \text{ u.a.}}$$

7. [2 points] Soit le point F , pied de la hauteur issue de E dans le triangle AEB . Déterminer la distance EF .

L'aire du triangle AEB peut aussi s'exprimer comme le demi-produit des mesures de la hauteur $[EF]$ associée à la base

$[AB]$ soit puisque $\begin{cases} \mathcal{A} = 24 \text{ u.a.} \\ AB = \sqrt{104} \text{ u.l.} \end{cases}$:

$$\mathcal{A} = \frac{EF \times AB}{2} \Leftrightarrow 24 = \frac{EF \times \sqrt{104}}{2} \Leftrightarrow \boxed{EF = \frac{2 \times 24}{\sqrt{104}} = \frac{12\sqrt{26}}{13} \text{ u.l.}}$$

Exercice 4. Statistiques et échantillonnage

8 points

On lance n fois un dé cubique (à six faces), chaque face étant numérotée de 1 à 6. On appelle f la fréquence de sortie d'un nombre pair.

1. [0.5 point] Calculer p , la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Il y a 3 nombres pairs pour 6 issues possibles à l'expérience aléatoire donc $p = 0,5$.

2. On note I_n , l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence f au seuil 95% pour les n lancers.

2. a. [1.5 point] Déterminer l'intervalle de fluctuation $I_{2\,500}$ (on arrondira au millième) et donner l'amplitude de l'intervalle.

On assimile les issues de l'expérience aléatoire à un échantillon de taille $n = 2\,500$. Les conditions sont bien respectées :

$$\begin{cases} n = 2\,500 > 25 \\ p = 0,5 \in [0,2 ; 0,8] \end{cases}$$

L'intervalle de fluctuation $I_{2\,500}$ de la fréquence f est donc :

$$I_{2\,500} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,48 ; 0,52]$$

L'amplitude de cet intervalle est alors : $0,52 - 0,48 = 0,4$.

2. b. [1.5 point] Déterminer n pour tel que $I_n = [0,475 ; 0,525]$.

On cherche donc n pour que :

$$I_n = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,475 ; 0,525]$$

Soit par exemple :

$$0,474 = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \sqrt{n} = \frac{1}{0,025} = 40$$

Puisque n est positif on obtient : $n = 1\,600$.

2. c. [1 point] Déterminer n pour que l'amplitude de l'intervalle I_n soit de 1%.

L'amplitude de l'intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc on cherche n tel que :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,01 \iff \sqrt{n} = \frac{2}{0,01} = 200 \implies n = 40\,000$$

3. On considère maintenant que $n = 2\,500$.

Sur les 2 500 lancers, on obtient :

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	410	425	401	425	422	417	2 500
Effectifs cumulés croissants	410	835	1 236	1 661	2 083	2 500	X

3. a. [2 points] Déterminer la médiane, la moyenne et les quartiles Q_1 et Q_3 de la série.

- La moyenne est :

$$m = \frac{410 \times 1 + 425 \times 2 + \dots + 417 \times 6}{2\,500} = \frac{8\,775}{2\,500} = 3,51$$

- Il y a 2 500 valeurs, donc on prendra comme médiane M_e une valeur comprise entre les 1 250^e et 1 251^e valeur. La médiane est $M_e = 4$.
- Il y a 2 500 valeurs et $0,25 \times 2\,500 = 625$. Le premier quartile sera donc la 625^e valeur soit $Q_1 = 2$.
- De même $0,75 \times 2\,500 = 1\,875$. Le troisième quartile sera donc la 1 875^e valeur soit $Q_3 = 5$.

3. b. [1.5 point] La fréquence f de sortie d'un nombre pair appartient-elle à l'intervalle de fluctuation $I_{2\,500}$? Que peut-on en conclure ?

La fréquence f de sorties de nombres pairs est :

$$f = \frac{425 + 425 + 417}{2\,500} = \frac{1\,267}{2\,500} = 0,5068 \in I_{2\,500}$$

On peut donc conclure que le dé a 95% de chances de ne pas être truqué.

Exercice 5. Choisir la forme adaptée**18 points**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x-1)(x-2) - 2(x+1)(2x-4)$.

Partie A

1. [1.5 point] Montrer que pour tout x réel on a : $f(x) = -3x^2 + x + 10$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) - 2(x+1)(2x-4) \\ &= x^2 - 2x - x + 2 - 2(2x^2 - 4x + 2x - 4) \\ &= x^2 - 3x + 2 - 4x^2 + 8x - 4x + 8 \\ f(x) &= \underline{-3x^2 + x + 10} \end{aligned}$$

2. [1.5 point] Montrer en factorisant l'expression initiale de f que pour tout x réel on a : $f(x) = (2-x)(3x+5)$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) - 2(x+1)(2x-4) \\ &= (x-1)(x-2) - 2(x+1) \times 2(x-2) \\ &= \underline{(x-2)} \times \left[(x-1) - 2(x+1) \times 2 \right] \\ &= \underline{(x-2)} \times \left[x-1-4x-4 \right] \\ f(x) &= \underline{(x-2)(-3x-5)} = \underline{(2-x)(3x+5)} \end{aligned}$$

3. [1 point] Montrer que pour tout x réel on a : $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12} &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \frac{121}{12} \\ &= -3x^2 + x - \frac{1}{12} + \frac{121}{12} \\ &= \underline{-3x^2 + x + 10} \end{aligned}$$

On retrouve alors la forme développée de $f(x)$ donc on a bien montré que pour tout réel x on a :

$$\boxed{f(x) = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}$$

Partie B

4. [1 point] Calculer l'image par f de $\left(\frac{1}{6}\right)$.

On obtient facilement avec la forme canonique de la question (3.) :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{6}\right) = -3 \times \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)^2}_0 + \frac{121}{12} = \frac{121}{12}}$$

5. [1.5 point] Résoudre l'équation $f(x) = x - 2$.

En utilisant la forme développée on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -3x^2 + x + 10 = x - 2 \\ &\iff -3x^2 = -12 \\ &\iff x^2 = 4 \\ &\iff (x = -2) \text{ ou } (x = 2) \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont : -2 et 2.

6. [1 point] Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or en utilisant la forme factorisée on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2-x)(3x+5) = 0 \\ &\iff (2-x=0) \text{ ou } (3x+5=0) \\ &\iff (x=2) \text{ ou } (x=-\frac{5}{3}) \end{aligned}$$

Partie C : Étude de f **7. [2 points] Déterminer par le calcul le maximum de f et la valeur pour lequel il est atteint.**

Pour tout réel x on a :

$$\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$$

Soit

$$-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \leq 0$$

D'où

$$\underbrace{-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(x)} \leq \frac{121}{12}$$

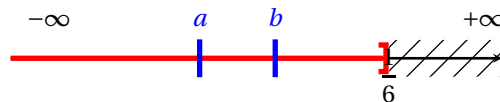
Donc $\frac{121}{12}$ est un majorant de f sur \mathbb{R} , il est atteint en $\frac{1}{6}$ d'après la question (4.) donc c'est le maximum de f sur \mathbb{R} .

8. [2 points] Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right]$.

On peut décomposer f , pour x réel on a :

$$x \mapsto \left(x - \frac{1}{6}\right) \mapsto \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \mapsto -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \mapsto \underbrace{-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(x)}$$

Donc soit deux réels a et b de l'intervalle $]-\infty; -1.5]$.



$$a \leq b \leq \frac{1}{6}$$

$$a - \frac{1}{6} \leq b - \frac{1}{6} \leq 0$$

$$\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 \geq \left(b + \frac{1}{6}\right)^2$$

On a composé par la fonction carrée décroissante sur $]-\infty; 0]$, l'ordre a changé puis

$$\underbrace{-3\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(a)} \leq \underbrace{-3\left(b + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(b)}$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{a \leq b \leq \frac{1}{6} \implies f(a) \leq f(b)}$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right]$.

9. [2 points] Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right[$.

De la même façon, soit a et b deux réels de l'intervalle $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &\leq a \leq b \\ 0 &\leq a - \frac{1}{6} \leq b - \frac{1}{6} \\ \left(a + \frac{1}{6}\right)^2 &\leq \left(b + \frac{1}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

On a composé par la fonction carrée croissante sur $[0; +\infty[$, l'ordre est inchangé, puis

$$\underbrace{-3\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(a)} \geq \underbrace{-3\left(b + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{121}{12}}_{f(b)}$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{\frac{1}{6} \leq a \leq b \implies f(a) \geq f(b)}$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right[$.

10. [1 point] Dresser alors le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-5	$\frac{1}{6}$	5	$+\infty$
Variations de f					

11. [1 point] Encadrer $f(x)$ si x appartient à l'intervalle $[-5; 5]$.

D'après le tableau de variations, on a directement un encadrement de $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle $[-5; 5]$:

$$\underline{x \in [-5; 5]} \implies \boxed{-70 \leq f(x) \leq \frac{121}{12}}$$

Partie D : Une fonction affine

12. [1.5 point] Déterminer la fonction affine g telle que : $\begin{cases} g(-2) = -4 \\ g(2) = 0 \end{cases}$.

- La fonction g est affine donc de la forme $g(x) = mx + p$. D'après la propriété des accroissements on a :

$$m = \frac{-4 - 0}{-2 - 2} = 1$$

- Donc $G(x) = x + p$ et p s'obtient par résolution de l'équation :

$$g(2) = 0 \iff 2 + p = 0 \iff p = -2$$

- La fonction g est donc définie par : $\boxed{g(x) = x - 2}$.

13. Construire sur le graphique de l'annexe la droite \mathcal{C}_g associée à la fonction affine g .

14. [1 point] Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Les abscisses des éventuels points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = g(x)$. On remarque que cette équation a été résolue lors de la question (5.). Les solutions sont -2 et 2 donc les points d'intersection sont :

$$\boxed{A(-2; -4) \text{ et } B(2; 0)}$$

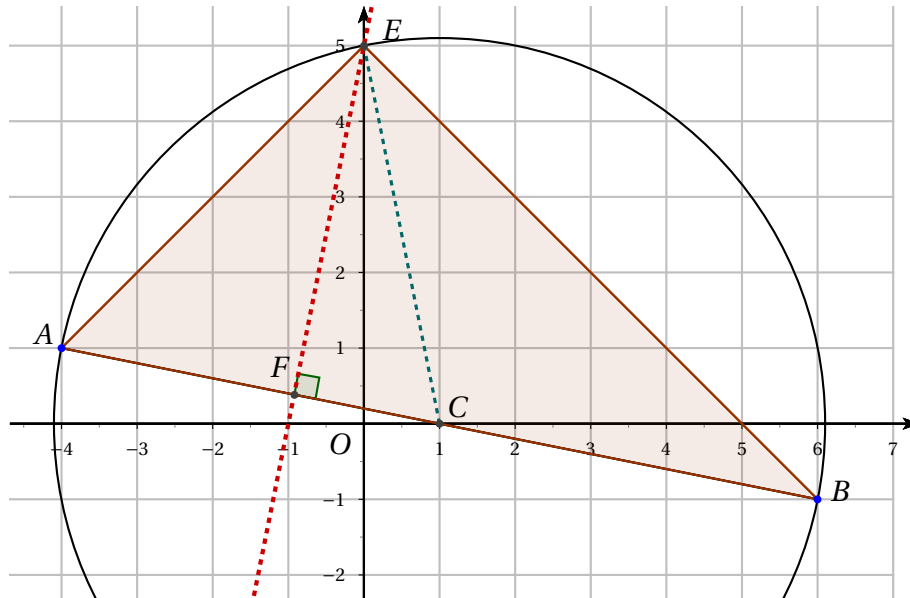
∞ Fin du devoir ∞

Bonus [1.5 point]

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}.$$

Annexe

Graphique de l'exercice 3



Courbe de l'exercice 5

