Math93.com

Devoir Surveillé n°7 Correction

Seconde
Inéquations
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 22 points

Exercice 1. Validations des compétences de base — 3 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'un intervalle lorsque cela est possible.

$$\begin{aligned}(I_1)\ :\quad 2x-3>1-4x &\Longleftrightarrow 6x>4\\ &\Longleftrightarrow x>\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{S_1=\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[}$$

$$\begin{aligned}(I_2)\ :\quad \frac{x}{3}-1\geq 2x+\frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 6\times\left(\frac{x}{3}-1\right)\geq 6\times\left(2x+\frac{1}{2}\right)\\ &\Longleftrightarrow 2x-6\geq 12x+3\\ &\Longleftrightarrow -10x\geq 9\\ &\Longleftrightarrow x\leq -\frac{9}{10}\end{aligned}$$

$$\boxed{S_2=\left]-\infty\,;-\frac{9}{10}\right]}$$

Exercice 2. Lecture graphique — $(0.5+0.5+0.5+3)=4.5$ points

Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $f : x \longmapsto f(x)=(x-2)(-x-2)$.

1. **Résoudre graphiquement l'inéquation : $(I_5)\ :\ f(x)\geq 0$.**
   Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq 0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de l'axe des abscisses, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $[-2\,;2]$.

2. **Construire sans justification $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction affine : $g : x\longmapsto g(x)=x-2$.**

3. **Résoudre graphiquement l'inéquation : $(I_6)\ :\ f(x)\geq g(x)$.**
   Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq f(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de ceux de $\mathscr{C}_f$, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $[-3\,;2]$.

4. **Résoudre par le calcul l'inéquation $(I_6)\ :\ f(x)\geq g(x)$.**

$$\begin{aligned}f(x)\geq g(x) &\Longleftrightarrow (x-2)(-x-2)\geq x-2\\ &\Longleftrightarrow (x-2)(-x-2)-(x-2)\geq 0\\ &\Longleftrightarrow (x-2)\Big[(-x-2)-1\Big]\geq 0\\ &\Longleftrightarrow (x-2)(-x-3)\geq 0\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(x-2)$:**

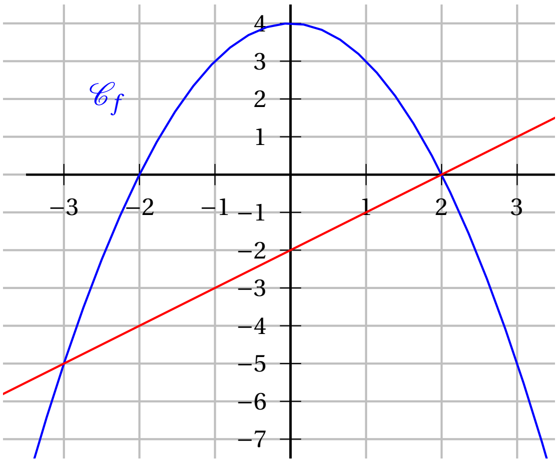
$$\begin{cases}x-2=0\Longleftrightarrow x=2\\ x-2>0\Longleftrightarrow x>2\end{cases}$$

- **Étude du signe de $1-3x$:**

$$\begin{cases}-x-3=0\Longleftrightarrow x=-3\\ -x-3>0\Longleftrightarrow x<-3\end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-2)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x)\geq g(x)\Longleftrightarrow x\in[-3\,;2]}$$



Exercice 3. D'après un tableau de signe — 3.5 points

L'étude du signe d'une expression $B(x)$ a permis d'établir le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Dire (sur cette feuille) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses . <u>Aucune justification n'est demandée</u>.

	Affirmation	**Vrai ou Faux ?**
1	$B(4,5)$ est négatif.	Vrai
2	$B(1) = 0$	Faux
3	-2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$.	Vrai
4	$B(0) < 0$	Faux
5	Si $x > 0$ alors $B(x) > 0$.	Faux
6	L'ensemble des solutions de $B(x) < 0$ est $S =]-\infty\ ;\ -2] \cup [3\ ;\ +\infty[$.	Faux
7	Les nombres tels que $B(x) > 0$ sont <u>des</u> nombres vérifiant $-2 < x < 3$.	Vrai (*mais Faux accepté*)

Exercice 4. Étude de signe (1 + 3 + 1) = 5 points

On considère l'expression A définie par : $A(x) = \dfrac{(1-2x)(x^2+1)}{(3x-5)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de *A*.

L'expression A est définie si le dénominateur est non nul donc si $(3x-5) \neq 0$ donc pour $x \neq \dfrac{5}{3}$.

L'ensemble de définition de A est donc : $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

2. Étudier le signe de $A(x)$ en dressant un tableau de signe.

Pour tout réel x, x^2 est positif donc le facteur (x^2+1) est strictement positif : $(x^2+1) \geq 1 > 0$.

- **Étude du signe de $(1-2x)$:**

$$\begin{cases} 1-2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2} \\ 1-2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- **Étude du signe de $(3x-5)$:**

$$\begin{cases} (3x-5) = 0 \iff x = \dfrac{5}{3} \\ (3x-5) > 0 \iff x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de (x^2+1)		+		+		+	
signe de $(1-2x)$		+	0	−		−	
signe de $(3x-5)$		−		−	0	+	
signe de $A(x) = \dfrac{(1-2x)(x^2+1)}{(3x-5)}$		−	0	+	‖	−	

3. En déduire les solutions de l'inéquation (I_7) : $A(x) \geq 0$.

$$\boxed{A(x) \geq 0 \iff x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{5}{3}\right[}$$

Exercice 5. Inéquations (2.5 + 2.5 + 1) = 6 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. (I_8) : $(x+3)^2 > 9x^2$.

$$\begin{aligned} (I_8)\ :\quad (x+3)^2 > 9x^2 &\iff (x+3)^2 - 9x^2 > 0 \\ &\iff (x+3)^2 - (3x)^2 > 0 \\ &\iff (x+3-3x)(x+3+3x) > 0 \\ &\iff (3-2x)(3+4x) > 0 \end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(3-2x)$:**

$$\begin{cases} (3-2x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2} \\ (3-2x) > 0 \iff x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

- **Étude du signe de $(3+4x)$:**

$$\begin{cases} (3+4x) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{4} \\ (3+4x) > 0 \iff x > -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $(3-2x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3+4x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(3-2x)(3+4x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{(x+3)^2 > 9x^2 \iff x \in \left]-\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right[}$$

2. (I_9) **:** $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{4}{4-x^2}$.

- Les valeurs interdites : Il faut que

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \iff x \neq -2 \\ 4-x^2 \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

- Résolution.

$$\begin{aligned}(I_9)\ :\quad \frac{1}{x+2} \leq \frac{4}{4-x^2} &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{(2-x)}{(2-x)(2+x)} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2-x-4}{(2-x)(2+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{-2-x}{(2-x)(2+x)} \leq 0\end{aligned}$$

On peut remarquer que $-2-x = -(2+x)$. Le tableau de signe s'établit facilement :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $(-2-x)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(2+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{-2-x}{(2-x)(2+x)}$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

$$\boxed{(I_9)\ :\ \frac{1}{x+2} \leq \frac{4}{4-x^2} \iff x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]-2\,;\,2[}$$

3. (I_{10}) **:** $\dfrac{1}{x^2} < -1$.

- Valeur interdite : Il faut que $x^2 \neq 0$ soit x non nul.
- Résolution.
  Pour tout réel x, x^2 est positif est donc pour tout réel non nul, $\dfrac{1}{x^2} > 0$. De ce fait l'inéquation (I_{10}) : $\dfrac{1}{x^2} < -1$ n'admet pas de solution. $S_{10} = \varnothing$.

Bonus [2 points]
Résoudre sur l'intervalle $[-10\,;\,10]$ l'inéquation : $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$.

$$\boxed{\begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \\ \text{ et } x \in [-10\,;\,10] \end{cases} \iff x \in [-10\,;\,-1] \cup [2\,;\,10]}$$