



Math93.com

Devoir Surveillé n°8A

Seconde Bilan

Durée 2,5 heures - Coeff. 10

Noté sur 41 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Géométrie

14 points

On considère dans le repère orthonormé de l'annexe les points $A(-3 ; 2)$, $B(2 ; -2)$ et $C(6 ; 3)$.

Partie A

1. Déterminer les coordonnées de A' et B' , les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$.

$$A'(4 ; 0,5) \text{ et } B'(1,5 ; 2,5)$$

2. Déterminer l'équation des médianes (AA') et (BB') .

- La droite (AA') est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{AA'}$ soient colinéaires. Or on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ col. } \overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} 7 \\ -1,5 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow -1,5(x+3) - 7(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -1,5x - 7y = -9,5 \\ &\Leftrightarrow \underline{1,5x + 7y = 9,5} \text{ ou d'équation réduite : } y = -\frac{3}{14}x + \frac{19}{14} \end{aligned}$$

- La droite (BB') est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que les vecteurs \overrightarrow{BM} et $\overrightarrow{BB'}$ soient colinéaires. Or on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix} \text{ col. } \overrightarrow{BB'} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow 4,5(x-2) + 0,5(y+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{4,5x + 0,5y = 8} \text{ ou d'équation réduite : } y = -9x + 16 \end{aligned}$$

3. Montrer que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont les solutions du système : $(S) : \begin{cases} 3x + 14y = 19 \\ 9x + y = 16 \end{cases}$.

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G qui est le centre de gravité. Les coordonnées de G sont donc les solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} 1,5x + 7y = 9,5 \\ 4,5x + 0,5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2 \times (1,5x + 7y) = 2 \times 9,5 \\ 2 \times (4,5x + 0,5y) = 2 \times 8 \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 3x + 14y = 19 \\ 9x + y = 16 \end{cases}$$

4. Résoudre le système et en déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

$$\begin{aligned} (S) : \begin{cases} 3x + 14y = 19 & (E_1) \\ 9x + y = 16 & (E_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + y = 16 & (E_2) \\ 9x + 42y = 57 & (3E_1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x + y = 16 & (E_2) \\ 41y = 41 & (3E_1 - E_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont : $G\left(\frac{5}{3} ; 1\right)$.

Partie B

On peut dans cette partie supposer que le point A' est de coordonnées A'(4 ; 0,5).

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Le repère est orthonormé donc le calcul des distances est légitime avec les formules usuelles. On obtient facilement :

- $AB^2 = 41 = BC^2$ et $AC^2 = 82$;
- Le triangle ABC est donc isocèle en B.
- Puisque $AB^2 + BC^2 = AC^2$, la réciproque du théorème de Pythagore implique qu'il est aussi rectangle en B.

2. Construire dans le repère de l'annexe le point D tel que : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.**3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D.**

En passant aux coordonnées on a :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 4 = x_D - 2 \\ 4 + 5 = y_D + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{D(1 ; 7)}$$

4. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

- Puisque par construction $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Le triangle ABC étant isocèle en B, ce parallélogramme admet deux côtés consécutifs de même mesure, c'est donc aussi un losange.
- Le triangle ABC étant aussi rectangle en B, ce losange admet un angle droit, c'est donc aussi un carré.

5. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = 2 \times \overrightarrow{AA'}$.**6. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.**

En passant aux coordonnées on a :

$$\overrightarrow{AE} = 2 \times \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 3 = 2 \times (4 + 3) \\ y_E - 2 = 2 \times (0,5 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{E(11 ; -1)}$$

7. Démontrer que les points D, C et E sont alignés.

De nombreuses façons de répondre à cette question, on peut par exemple passer par les vecteurs.

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc les points D, C et E sont alignés et C est le milieu du segment [DE].

Exercice 2. Étude de Fonctions

12 points

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$ et dont la courbe représentative notée \mathcal{C}_g est tracée sur l'annexe dans le plan

muni d'un repère orthonormé : $g(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 10}$.

1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g .

x	-5	-2	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
Variations de g					

2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Notons que la valeur interdite de la fonction g est (-5) donc sur son intervalle de définition $] -5 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_g avec l'axe des abscisses sont 2 et (-2) .

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} et telle que : $f(3) = 0$ et $f(-1) = 2$.

1. Donner une expression de $f(x)$.

la fonction f est affine donc de la forme $f(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

On obtient facilement : $f(x) = -0,5x + 1,5$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?

Le coefficient directeur $m = -0,5$ étant négatif, la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .

3. Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$: $f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$.

Pour tout réel x de $] -5 ; +\infty[$, on a $2x + 10 \neq 0$ et donc :

$$f(x) - g(x) = -0,5x + 1,5 - \frac{4 - x^2}{2x + 10}$$

$$= \frac{(-0,5x + 1,5)(2x + 10) - 4 + x^2}{2x + 10}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g

Les abscisses des point d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{11-2x}{2x+10} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 11-2x = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \\ &\iff \underline{x = 5,5} \end{aligned}$$

Or on a :

$$g(5,5) = f(5,5) = -0,5 \times 5,5 + 1,5 = -1,25 = -\frac{5}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g sont donc $(5,5 ; f(5,5))$ soit $(5,5 ; -\frac{5}{4})$.

3.

3. a. Étudier le signe de $\frac{11-2x}{2x+10}$ sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, à l'aide d'un tableau.

$$\left\{ \begin{array}{l} 11-2x = 0 \iff x = \frac{11}{2} \\ 11-2x < 0 \iff x > \frac{11}{2} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x+10 = 0 \iff x = -5 \\ 2x+10 < 0 \iff x < -5 \end{array} \right.$$

x	-5	$\frac{11}{2}$			$+\infty$
Signe de $11 - 2x$		+	0	-	
Signe de $2x + 10$	0	+		+	
Signe de $\frac{11-2x}{2x+10}$		+	0	-	

L'expression $\frac{11-2x}{2x+10}$ est donc positive (ou nulle) sur l'intervalle $] -5 ; \frac{11}{2}]$ et négative (ou nulle) sur l'intervalle $[\frac{11}{2} ; +\infty [$.

3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

$$f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0 \iff \frac{11-2x}{2x+10} \geq 0$$

Donc d'après l'étude menée lors de la question 3.a.

$$S = \left] -5 ; \frac{11}{2} \right]$$

3. c. En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

La courbe \mathcal{C}_f est donc au dessus de la courbe \mathcal{C}_g sur l'intervalle $] -5 ; \frac{11}{2}]$ et au-dessous sinon.

Exercice 3. Fonction polynôme du second degré

8 points

Soit h la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par :

$$h(x) = (x - 3)(2x + 1) - (3 - x) \left(\frac{2}{3} - x \right)$$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - 5$.
2. Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction h en appliquant le cours.

La fonction h est une fonction polynôme qui s'exprime sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec : $\begin{cases} a = 1 \\ \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{49}{9} \end{cases}$.

Puisque le coefficient $a = 1$ est positif, on a :

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{2}{3}$	$+\infty$
Variations de h			

4. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $h(x) \leq 0$.

Pour cela on va factoriser l'expression de h .

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3} + \frac{7}{3}\right) \\ h(x) &= (x - 3) \left(x + \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Il reste alors à étudier le signe de chaque facteur et à faire un tableau de signes.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3 = 0 \iff x = 3 \\ x - 3 < 0 \iff x < 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{5}{3} = 0 \iff x = -\frac{5}{3} \\ x + \frac{5}{3} < 0 \iff x < -\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
signe de $x - 3$	-	-	0	+
signe de $x + \frac{5}{3}$	-	0	+	+
signe de $(x - 3) \left(x + \frac{5}{3}\right)$	+	0	-	0

Conclusion : $h(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

Exercice 4. Probabilités**7 points**

Une agence de voyage dispose de deux types de prestations : classique ou luxe, et propose, au moment de la réservation, une option d'assurance annulation. Parmi les 50 000 clients de l'agence, le nombre de clients ayant réservé un voyage « classique » est de 30 000 et ceux ayant réservé un voyage de « luxe » de 20 000.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les événements suivants :

- L : « le client a réservé un voyage de luxe » et C : « le client a réservé un voyage classique » ; A : « le client a choisi l'option d'assurance annulation ».
- 65% des clients ayant réservé un voyage de luxe ont choisi l'option d'assurance annulation ; 30% des clients ayant réservé un voyage classique ont choisi l'option d'assurance annulation.

Si besoin, tous les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer $p(L)$ et $p(C)$.

- On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages. Il y a 30 000 clients sur 50 000 ayant réservé un voyage « classique » donc $p(C) = \frac{30\,000}{50\,000} = 0,6$;
- On a alors $p(L) = 1 - p(C) = 0,4$.

2. Compléter sur l'annexe l'arbre de probabilités.

3. En utilisant l'arbre :

3. a. Calculer $p(L \cap A)$ et interpréter les résultats dans le cadre de l'exercice.

La probabilité $p(L \cap A)$ s'obtient en effectuant le produit des probabilités des branches du chemin correspondant soit :

$$p(L \cap A) = 0,4 \times 0,65 = \underline{0,26}$$

la probabilité qu'un client ait choisi un voyage de luxe et ait souscrit à l'assurance annulation est donc de 0,26.

3. b. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi un voyage classique et ait souscrit à l'assurance annulation.

La probabilité cherchée est :

$$p(C \cap A) = 0,6 \times 0,3 = \underline{0,18}$$

3. c. En déduire la probabilité qu'un client ait choisi l'assurance annulation.

On a donc :

$$p(A) = p(L \cap A) + p(C \cap A) = 0,26 + 0,18 = \underline{0,44}$$

4. On choisit au hasard un échantillon de 100 clients de l'agence, déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence f de clients ayant réservés un voyage « Classique ».**Proposition 1** (Intervalle de fluctuation (admis))

Si on analyse un grand nombre d'échantillons de taille n et que l'on observe à chaque fois la fréquence d'apparition f de l'issue choisie, alors sous certaines conditions, ($n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$) :

- Au moins 95% des fréquences f se situent dans l'intervalle de fluctuation $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Validation des conditions.

On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages. Il y a 30 000 clients sur 50 000 ayant réservé un voyage « classique »

donc la proportion associée est $p = \frac{30\,000}{50\,000} = 0,6$.

Les conditions d'application sont vérifiées : $\begin{cases} n = 100 \geq 25 \\ 0,2 \leq p = 0,6 \leq 0,8 \end{cases}$;

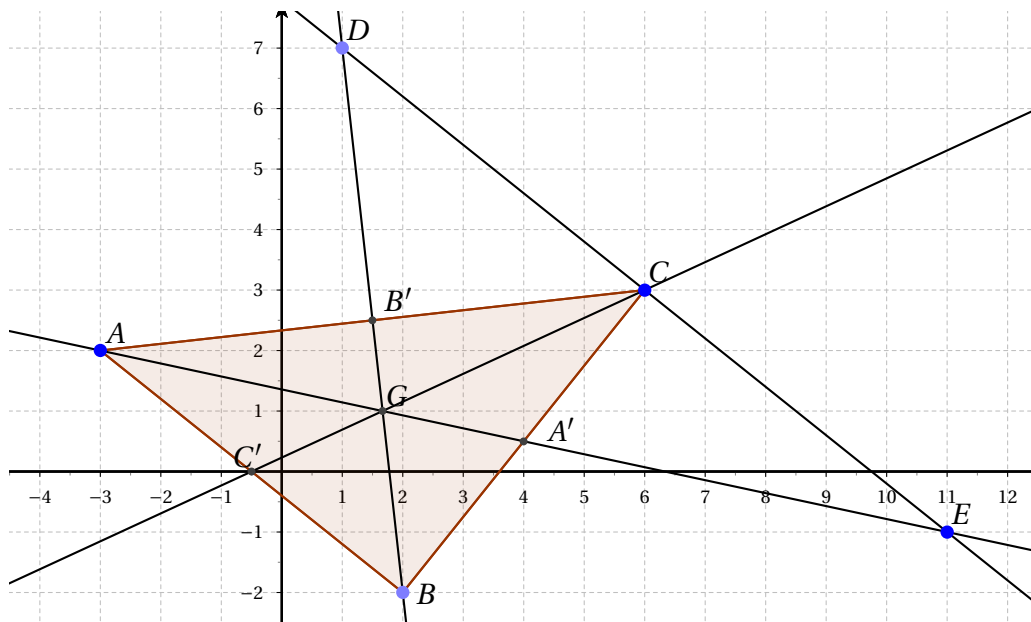
- Au moins 95% des fréquences f se situent dans l'intervalle de fluctuation :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \underline{[0,5 ; 0,7]}$$

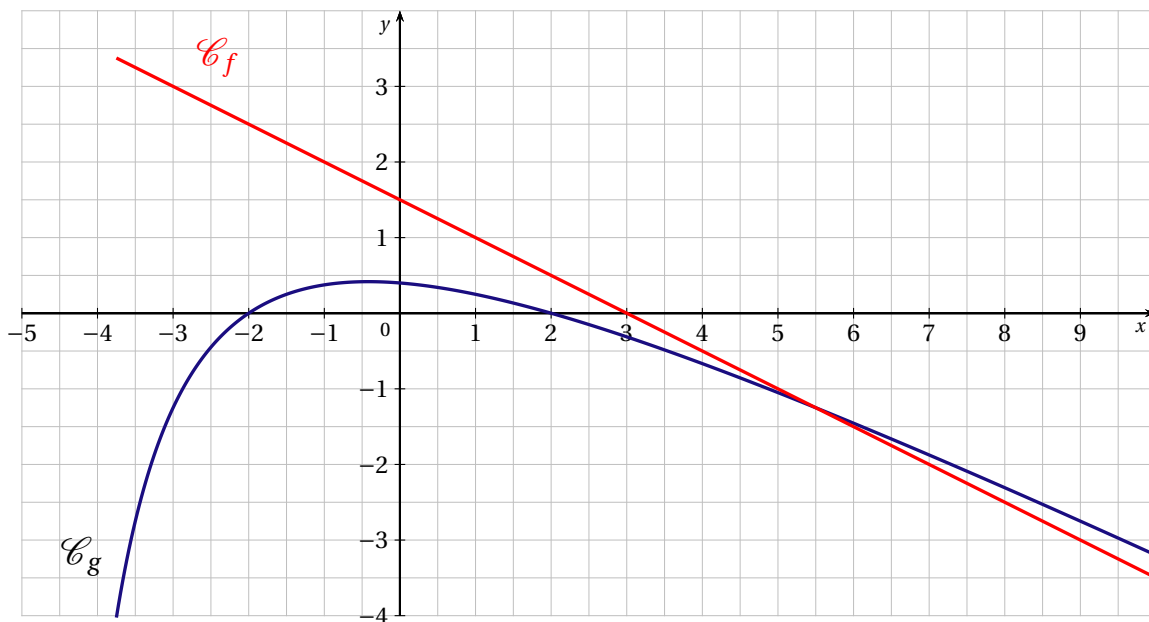
∞ Fin du devoir ∞

Annexe du DS n°8A à rendre avec la copie

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 2



Annexe de l'exercice 4

