

# Devoir Surveillé n°2 (Correction)



Math93.com

## Seconde Fonctions

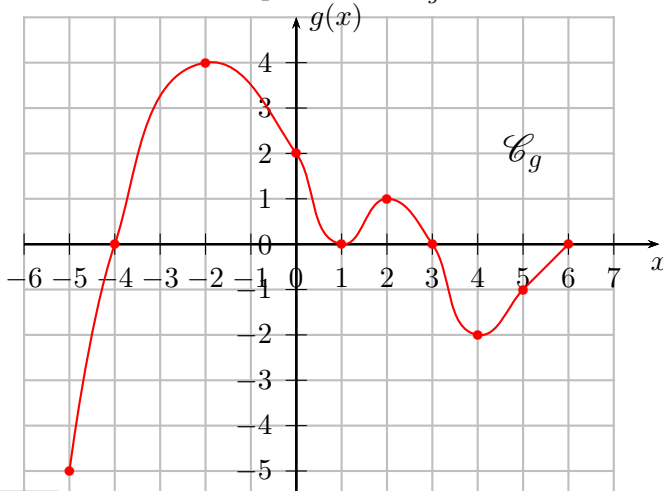
Durée 100 min - Coeff. 2

Noté sur 25 points

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.*

### Exercice 1. Lectures graphiques (A compléter sur cette feuille sans justifications) 4.5 points

On considère la fonction  $g$  dont on donne la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  ci-dessous.



#### A compléter sur cette feuille

1. Lire l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_g$  de la fonction  $g$  :  $\mathcal{D}_g = [-5 ; 6]$
2. Donner l'images par la fonction  $g$  de 4 :  $g(4) = -2$
3. Donner le ou les antécédent(s) par  $g$  de 4 :  $-2$
4. Donner les antécédents par  $g$  de 0 :  $-4 ; 1 ; 3 ; 6$
5. Déterminer l'ensemble des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction  $g$ . On note  $E$  cet ensemble :  $E = [-4 ; 3] \cup \{6\}$
6. Quels sont les maximum et minimum de  $g$  sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de  $x$  sont-ils atteints ? : max 4 atteint pour  $x = -2$  et min  $-5$  atteint pour  $x = -5$
7. Résoudre par lecture graphique l'équation  $g(x) = 2$  :  $-3, 5$  et  $0$
8. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  :

$x$	-5	-2	1	2	4	6
Variations de $g$	-5	4	0	1	-2	0

## Exercice 2. Étude de parité

4.5 points

1. Étudier la parité des fonctions suivantes en précisant les éventuelles symétrie des courbes représentatives dans un repère orthonormé :

1. a.  $f_2$  définie sur  $I = \mathbb{R}$  par  $f_2(x) = x^3 - x$ .



## Corrigé

- Intervalle de définition :

La fonction est définie sur  $I = \mathbb{R}$  qui est bien centré en 0.

- Étude de la parité :

Pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $(-x) \in I$  et :

$$f_2(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f_2(x)$$

Donc la fonction est impaire sur  $I$  et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère .

1. b.  $f_3$  définie sur  $I_3 = [-5 ; 5]$  par  $f_3(x) = x^2 + x + 1$ .



## Corrigé

- Intervalle de définition :

La fonction est définie sur  $I_3 = [-5 ; 5]$  qui est bien centré en 0.

- Étude de la parité : on exhibe un contre-exemple

On a

$$f_3(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \quad \text{et} \quad f_3(1) = (1)^2 + 1 + 1 = 3$$

Donc

$$f_3(-1) \neq f_3(1) \quad \text{et} \quad f_3(-1) \neq -f_3(1)$$

La fonction  $f_3$  n'est ni paire , ni impaire.

1. c.  $f_4$  définie sur  $I_4 = [-4 ; 5]$  par  $f_4(x) = 2x^3$ .



## Corrigé

L'intervalle n'est pas centré en 0 car  $5 \in I_4$  mais  $-5 \notin I_4$  donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

2. Soit  $f$  une fonction impaire définie sur  $I = \mathbb{R}$ . Étudier la parité de la fonction  $g$  définie sur  $I = \mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (2x^2 + 1) \times f(x)$$



## Corrigé

- Intervalle de définition :

La fonction est définie sur  $I = \mathbb{R}$  qui est bien centré en 0.

- Étude de la parité :

Pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $(-x) \in I$  et :

$$g(-x) = (2(-x)^2 + 1) \times f(-x)$$

$$g(-x) = (2x^2 + 1) \times f(-x)$$

or  $f$  est impaire donc  $f(-x) = -f(x)$

$$g(-x) = (2x^2 + 1) \times (-f(x))$$

$$g(-x) = -(2x^2 + 1) \times f(x)$$

$$g(-x) = -g(x)$$

Donc la fonction  $g$  est impaire sur  $I$  et sa courbe est est symétrique par rapport à l'origine du repère .

### Exercice 3. Tableau de variations

5 points

Une fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[-4 ; 5]$  admet le tableau de variation ci-dessous.

$x$	-4	0	2	5
Variations de $h$	2	30	-10	10

1. Pour  $x \in [0 ; 5]$ , encadrer  $h(x)$ .



#### Corrigé

Pour  $x \in [0 ; 5]$ , on a :

$$\boxed{-10 \leq h(x) \leq 30}$$

2. Quels sont les maximum et minimum de  $h$  sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de  $x$  sont-ils atteints ?



#### Corrigé

- Le maximum de  $h$  sur  $[-4 ; 5]$  est 30, atteint pour  $x = 0$ .
- Le minimum de  $h$  sur  $[-4 ; 5]$  est  $(-10)$ , atteint pour  $x = 2$ .

3. Combien l'équation  $h(x) = 0$  a-t-elle de solutions sur l'intervalle  $[-4 ; 2]$  ? Justifier avec soin.



#### Corrigé

- Sur l'intervalle  $[-4 ; 0]$ , la fonction  $h$  est croissante et de minimum  $h(-4) = 2 > 0$ , donc l'équation  $h(x) = 0$  n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle  $[-0 ; 2]$ , la fonction  $h$  est décroissante et passe de  $30 > 0$  à  $(-10) < 0$  donc l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution sur cet intervalle.
- Donc sur  $[-4 ; 2]$  l'équation  $h(x) = 0$  admet une seule solution.

4. Comparer  $h(1)$  et  $h(1,5)$ . Justifier votre réponse.



### Corrigé

Sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ , la fonction  $h$  est décroissante donc puisque :

$$0 \leq 1 \leq 1,5 \leq 2 \implies h(1) \geq h(1,5)$$

5. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe  $(Oy)$  ?



### Corrigé

Les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe  $(Oy)$  sont  $(0 ; h(0))$  soit  $(0 ; 30)$ .

## Exercice 4. Une fonction ... algébrique

6 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

1. Déterminer l'image de  $(3 + \sqrt{2})$  par  $f$  sous la forme  $a + b\sqrt{2}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs.



### Corrigé

$$f(3 + \sqrt{2}) = 2 \times (3 + \sqrt{2})^2 - 8 \times (3 + \sqrt{2}) + 6$$

$$f(3 + \sqrt{2}) = 2 \times ((3)^2 + 2 \times (3) \times \sqrt{2} + 2) \underbrace{- 8 \times (3)}_{-24} - 8 \times \sqrt{2} + 6$$

$$f(3 + \sqrt{2}) = 2 \times (9 + 6\sqrt{2} + 2) - 24 - 8\sqrt{2} + 6$$

$$f(3 + \sqrt{2}) = 2 \times (11 + 6\sqrt{2}) - 8\sqrt{2} - 18$$

$$f(3 + \sqrt{2}) = + 22 + \underbrace{12\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}_{4\sqrt{2}} - 18$$

$$f(3 + \sqrt{2}) = + \underbrace{22 - 18}_4 + 4\sqrt{2}$$

Soit

$$f(3 + \sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$$

2. Déterminer l'image de  $(\frac{2}{3})$  par  $f$  sous la forme d'une fraction irréductible.

**Corrigé**

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 6$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \times 2^2}{3^2} + \frac{-8 \times 2}{3} + 6$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8 - 16 \times 3 + 6 \times 9}{9}$$

Soit

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

3.

3. a. Montrer que pour tout réel  $x$  on a

$$f(x) = 2(1 - x)(3 - x)$$

**Corrigé**Par définition on sait juste que pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à  $f(x)$  surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de  $f$ . Pour tout réel  $x$  on a :

$$2(1 - x)(3 - x) = 2 \left( 1 \times 3 \underbrace{-1x - 3x + x^2}_{-4x} \right)$$

$$2(1 - x)(3 - x) = 2(3 - 4x + x^2)$$

$$2(1 - x)(3 - x) = \underbrace{2x^2 - 8x + 6}_{f(x)}$$

On a donc montré que pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = 2(1 - x)(3 - x)$$

3. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  avec l'axe des abscisses.**Corrigé**Les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation  $f(x) = 0$ . En utilisant l'expression de  $f$  démontrée lors de la question 4.a. on obtient :

$$f(x) = 0 \iff 2(1 - x)(3 - x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un

des facteurs est nul soit :

$$f(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - x = 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\mathcal{S}_1 = \{A(1; 0) ; B(3; 0)\}$$

4. Déterminer les antécédents de 6 par  $f$ .



### Corrigé

Les antécédents de 6 par  $f$  sont les solutions, si elles existent, de l'équation  $f(x) = 6$ . En utilisant l'expression initiale de  $f$  on obtient :

$$f(x) = 6 \iff 2x^2 - 8x + 6 = 6$$

$$f(x) = 6 \iff 2x^2 - 8x = 0$$

$$f(x) = 6 \iff x(2x - 8) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$f(x) = 6 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 8 = 0$$

$$f(x) = 6 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{+8}{2} = 4$$

Les antécédents de 6 par  $f$  sont donc 0 et 4.

$$\mathcal{S}_2 = \{0 ; 4\}$$

## Exercice 5. La Vertex Form c'est ma passion

5 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (3 - x)(x + 1) - (3 - x)^2$$

1. Développer  $f(x)$ .



### Corrigé

Pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (3 - x)(x + 1) - (3 - x)^2 \\ &= 3x + 3 - x^2 - x - (9 - 6x + x^2) \end{aligned}$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

2. Factoriser  $f(x)$ .

**Corrigé**

Pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (3-x)(x+1) - (3-x)^2 \\ &= (3-x)(x+1) - (3-x)(3-x) \\ &= (3-x)[(x+1) - (3-x)] \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (3-x)(2x-2)}$$

3. Montrer que pour tout réel  $x$ , la *vertex form* de  $f$  est :

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 2$$

**Corrigé**

Pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{aligned} -2(x-2)^2 + 2 &= -2(x^2 - 4x + 4) + 2 \\ &= -2x^2 + 8x - 8 + 2 \\ &= -2x^2 + 8x - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{-2(x-2)^2 + 2 = f(x)}$$

4. Déterminer le maximum de  $f$  et la valeur de  $x$  pour lequel il est atteint.

**Corrigé**

On vient de montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 2$$

Or pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} (x-2)^2 \geq 0 &\iff -2(x-2)^2 \leq 0 \\ &\iff -2(x-2)^2 + 2 \leq 2 \\ &\iff \boxed{f(x) \leq 2} \end{aligned}$$

De ce fait, 2 est UN majorant de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , or ce majorant est atteint pour  $x = 2$  puisque  $f(2) = 2$ .

De ce fait, 2 est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , il est atteint pour  $x = 2$ .

↵ **Fin du devoir** ↻

**Question Bonus 1**

Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 12 \text{ et } g(x) = 2x$$



### Corrigé

Les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sont les solutions de l'équation :

$$\begin{aligned}
 f(x) = g(x) &\iff x^2 - 5x + 12 = 2x \\
 &\iff x^2 - 7x + 12 = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12 = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
 &\iff (x - 4)(x - 3) = 0 \\
 &\iff (x - 4 = 0) \text{ ou } (x - 3 = 0) \\
 &\iff \boxed{(x = 4) \text{ ou } (x = 3)}
 \end{aligned}$$



### Question Bonus 2

Soit  $x$  un réel strictement positif, tel que  $\frac{1}{x^2} + x^2 = 7$ .

Déterminer les valeurs de  $\frac{1}{x^4} + x^4$  et  $\frac{1}{x} + x$ .

*Indice* : Penser aux identités remarquables !