Devoir Surveillé n°6

Math93.com

Seconde

Vecteurs et Inéquation

Durée 100 min - Coeff. 2

Noté sur 34 points

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif ou sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. La durée de l'épreuve est de 100 min.
Sauf mention contraire, toute les réponses doivent être justifiées.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Une histoire de médianes — 5 points

On considère un triangle quelconque ABC. On note A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[AB]$.

> **Remarque**
> Vous pourrez faire sur votre copie une figure que vous complèterez au fur et à mesure. Ce n'est pas exigé.

On considère le point M, isobarycentre des points A, B et C donc tel que :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

1. Montrer que :
$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

2. En déduire que le point M appartient à la médiane (CC').

3. On admet pour la suite que :
$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \text{ et } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

Que peut-on conclure ?

Exercice 2. Barycentre — 7 points

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan et a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés $\big(A,a\big)$ et $\big(B,b\big)$ le point G vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{AG} + b\,\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}.$$

On note :

$$G = \text{bar}\left\{\big(A,a\big),\big(B,b\big)\right\}.$$

Définition 2 (Barycentre de 3 points)

Soient A, B et C trois points distincts du plan et a , b et c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés $\big(A,a\big)$, $\big(B,b\big)$ et $\big(C,c\big)$ le point G vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{AG} + b\,\overrightarrow{BG} + c\,\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}.$$

On note :

$$G = \text{bar}\left\{\big(A,a\big),\big(B,b)\big),\big(C,c\big)\right\}.$$

L' Objectif de cet exercice est de construire facilement le point M, barycentre des points pondérés $\big(A,1\big)$, $\big(B,2\big)$ et $\big(C,3\big)$, que l'on note $M = \text{bar}\left\{\big(A,1\big),\big(B,2)\big),\big(C,3\big)\right\}$. C'est à dire le point M vérifiant

$$1\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BM} + 3\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}.$$

On considère le point H, barycentre des points pondérés $\big(A,1\big)$, $\big(B,2\big)$, que l'on note $H = \text{bar}\left\{\big(A,1\big),\big(B,2)\big)\right\}$.
C'est à dire le point H vérifiant

$$1\,\overrightarrow{AH} + 2\,\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{0}.$$

1. Sur votre copie, construire un triangle quelconque ABC (on dit que c'est un triangle scalène).

2. Montrer que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

3. Construire H sur votre figure.

4. Montrer que :

$$M = \text{bar}\left\{\big(H,3\big),\big(C,3\big)\right\}$$

5. En déduire que M est le milieu du segment $[HC]$.

6. Construire M sur votre figure.

Exercice 3. Équations ... équations — 6 points

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x-6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ x+1 \end{pmatrix} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$$

1. Pour quelles(s) valeurs(s) du réel x les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Montrer que :
$$\left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 - 12x + 40$$
3. De même calculer $\left\|\vec{v}\right\|^2$.
4. Pour quelles(s) valeurs(s) du réel x les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils de même norme ?

Exercice 4. Vecteurs et coordonnées — 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère les points suivants :

$$A(5\,;\,0)\,,\; B(1\,;\,2)\,,\; C(2\,;\,-3) \text{ et } D(0\,;\,-2)$$

Remarque

Dans cet exercice, aucune figure n'est demandée mais vous pouvez en faire une rapidement pour vous aider.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils colinéaires ?
2. Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.
3. Soit F le point défini par : $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.
   Calculer les coordonnées du point F.

Tournez la page . . .

Exercice 5. Inéquation — 10 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{18x^3 - 51x^2 + 11x + 10}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer les valeurs interdites et l'ensemble de définition D_f.

2. Factorisation par identification.

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$18x^3 - 51x^2 + 11x + 10 = (2 - 3x)\big(-6x^2 + ax + b\big).$$

Déterminer a et b par identification.

3. Montrer que pour tout réel x de D_f on a :

$$f(x) = \frac{(2 - 3x)(3x + 1)(5 - 2x)}{(x - 1)(x + 1)}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$f(x) \geq 0.$$

(On dressera avec rigueur un tableau de signes de chaque facteur avant de conclure.)

5. Sans effectuer de calcul, donner le signe de $f(\pi)$.

Fin du devoir