Math93.com

TD 1 - Seconde
Arithmétique

Partie I. Division euclidienne, Multiples et diviseurs

Exercice 1. Vrai ou Faux 1

1. Montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.
2. Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 3.
3. Il existe des entiers relatifs a, b et c tels que a divise bc sans que a ne divise ni b, ni c. Vrai ou faux ?

Exercice 2. Une équation diophantienne (c)

Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 7$.

Remarque historique

Une **équation diophantienne**, en mathématiques, est une équation polynomiale à une ou plusieurs inconnues dont les solutions sont cherchées parmi les nombres entiers, éventuellement rationnels, les coefficients étant eux-mêmes également entiers.

Exercice 3. Python, c'est ma passion !

Écrire une fonction Python de paramètres a et b entiers naturels qui renvoie True si a est multiple de b et False sinon.

Exercice 4. Parité ... parité ... (c)

1. Soit a et b deux nombres impairs.
   Que dire de la parité de l'entier : $N = a^2 + b^2$?
2. Soit a un nombre impair. Démontrer que a^3 est un nombre impair.

Partie II. Nombres premiers

Exercice 5. Vrai ou Faux 2 (c)

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.
3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.
4. **Affirmation 4** : Tous les nombres premiers sont impairs.
5. **Affirmation 5** : Tous les nombres impairs sont premiers.

Exercice 6. Avec la factorielle (c)

Prouver que $a = 100! + 97$ n'est pas premier.

Remarque

On note $n!$ (se lit « factoriel n ») le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, pour tout entier naturel $n > 0$. Par convention on définit :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Remarque historique

La **notation factorielle** est introduite par le mathématicien Christian KRAMP (1760-1826) en 1808 dans *Éléments d'arithmétique universelle* (1808).

Exercice 7. Marcel Pagnol (1895-1974) (c)

Dans son ouvrage intitulé "Inédits", l'écrivain français Marcel Pagnol affirme que :

"*la somme de deux nombres impairs consécutifs et de leur produit est un nombre premier*".

Avait-il raison ?

Aide

Aide : Liste des premiers nombres premiers inférieurs à 200 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 et 199

Remarque

Les Inédits de Marcel Pagnol, Vertiges du Nord-Carrère, 1987 ; textes divers écrits entre 1940 et 1960, rassemblés par son fils Frédéric.

Partie III. PGCD et décompositions en facteurs premiers

Exercice 8. D'après Brevet, Amérique Sud (c)

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 cm et 225 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.

1. Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté ? De 6 cm de côté ?
2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser ?
 Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

Exercice 9. D'après Brevet (c)

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
2. Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
3. Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$.

Exercice 10. PGCD - ex. 126 du livre (c)

Lors d'un tournoi de pétanque, il y a 80 hommes et 60 femmes inscrits. L'organisation veut constituer un maximum d'équipes mixtes contenant toutes le même nombre d'hommes et le même nombre de femmes. Combien d'équipes peuvent être constituées ?

Partie IV. Compléments

Exercice 11. * Une affirmation (Décomposition en facteurs premiers) (c)

Choisir un nombre entier naturel à 3 chiffres et l'écrire deux fois côte à côte de façon à obtenir un nombre à 6 chiffres.
Affirmation : votre nombre est divisible par 91 et par 77.
Prouvez cette affirmation.

Exercice 12. * Ex. 127 du livre

La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs est 1085. Quels sont ces trois nombres ?
On choisira astucieusement une seule inconnue, et on établira une équation que l'on résoudra.

Exercice 13. La conjecture de Goldbach - Ex. 120 du livre

La conjecture de Goldbach affirme que

« tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers ».

Remarque historique

Formulée en 1742 par Christian Goldbach, c'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres et des mathématiques. Il partage avec l'hypothèse de Riemann et la conjecture des nombres premiers jumeaux le numéro 8 des problèmes de Hilbert, énoncés par celui-ci en 1900.

1. Vérifier cette conjecture pour tous les nombres pairs de l'intervalle $[10; 20]$.
2. Trouver tous les nombres premiers p et p' tels que : $100 = p + p'$.
3. *Bonus : prouver cette conjecture (Just Kidding !)*

Exercice 14. * $\sqrt{2}$ est irrationnel - Ex. 128 du livre

On cherche à démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls.

1. Montrer que : $2b^2 = a^2$.
2. En déduire que a^2 est un nombre pair puis que a est pair.
3. Démontrer que b est aussi pair.
4. Relever une contradiction et conclure.

Remarque historique

- La première trace de $\sqrt{2}$ est une tablette babylonienne actuellement détenue par l'université de Yale aux USA. Elle est datée entre 1800 et 1600 avant notre ère.
- Selon PYTHAGORE (Vers 580 av. J.-C. Samos), tout est nombre, au sens où, tout est rationnel. C'est pourtant dans son groupe que fut élaborée une démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- La révélation de cette découverte provoqua un énorme scandale. Il fut tel que la légende rapporte que le pythagoricien HIPPASE DE METAPONTE, accusé d'avoir révélé cette découverte au monde (vers 530 avant notre ère), périt noyé, jeté à la mer par ses condisciples.

Exercice 15. * Développement décimal illimité - Ex. 140 du livre

Un nombre possède un développement décimal illimité périodique lorsque son développement décimal est illimité et qu'une séquence de nombres se répète. Par exemple,

$$\frac{10}{7} = 1,\boxed{428571}\boxed{428571}\cdots$$

La période est 428571 et on note alors :

$$\frac{10}{7} = 1,\overline{428571}$$

1. Donner la période des nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{45}{11}$.

2. On cherche maintenant à déterminer le rationnel x tel que : $x = 39,\overline{27}$.

2. a. Comment écrire $100x$?

2. b. Calculer alors $100x - x$ et en déduire une écriture fractionnaire de x en donnant une fraction irréductible.

3. Déterminer le rationnel y tel que : $y = 5,\overline{123}$.

Exercice 16. ** Ex. 141 du livre

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 24.

Exercice 17. *** (Très difficile) Le génie de Dirichlet (1805-1859), Prusse

Le génial mathématicien Dirichlet s'inspire des découvertes de Joseph Fourier (1768 - 1830) sur ses séries. Charles Gustave Jacob Jacobi (1804 - 1851) dit de lui :

« *En appliquant les séries de Fourier à la théorie des nombres, Dirichlet a récemment trouvé des résultats atteignant les sommets de la perspicacité humaine* »

Dirichlet parvient à démontrer cette égalité magique :

si P désigne l'ensemble des nombres premiers : $\boxed{\prod_{p\in P} \frac{1}{1-p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

1. Faire les TD d'algorithmique (lien ici) sur les tests de primalités.

2. Essayer de concevoir des fonctions python permettant de tester cette égalité magique.

↫ **Fin du TD** ↬

Corrections

Correction de l'exercice 1 : Vrai ou Faux

1. Montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.
2. Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 3.
3. Il existe des entiers relatifs a, b et c tels que a divise bc sans que a ne divise ni b, ni c. Vrai ou faux ?

Correction de l'exercice 2 : équation diophantienne

Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 7$.

Corrigé

Pour tous les entiers x et y on a :

$$x^2 - y^2 = 7 \iff (x-y)(x+y) = 7$$

Or x et y sont entiers relatifs, donc leur somme et et différence le sont aussi et puisque 7 est un nombre premier cela impose que :

$$\begin{cases}(x-y)=7\\(x+y)=1\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}(x-y)=1\\(x+y)=7\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}(x-y)=-1\\(x+y)=-7\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}(x-y)=-7\\(x+y)=-1\end{cases}$$

On va donc résoudre ces 4 systèmes :

$$\begin{cases}x-y=7\\x+y=1\end{cases} \iff \begin{cases}x+y=1\\2x=8\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x-y=-7\\x+y=-1\end{cases} \iff \begin{cases}x+y=-1\\2x=-8\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x-y=1\\x+y=7\end{cases} \iff \begin{cases}x+y=7\\2x=8\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=-7\end{cases} \iff \begin{cases}x+y=-7\\2x=-8\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}}$$

Correction de l'exercice 4 : Parité ... parité ...

1. Soit a et b deux nombres impairs.
Que dire de la parité de l'entier : $N = a^2 + b^2$?

Corrigé

Soit a et b deux nombres impairs. Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que :

$$a = 2k + 1 \text{ et } b = 2k' + 1$$

On a alors :

$$\begin{aligned} N = a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 4k'^2 + 4k' + 2 \\ &= 2\underbrace{\left(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1\right)}_{m \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Donc $N = 2m$ avec m entier donc N est un entier pair.

2. Soit a un nombre impair. Démontrer que a^3 est un nombre impair.

Corrigé

Soit a entier impairs. Il existe donc un entier relatif k tel que : $a = 2k + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} a^3 &= (2k+1)^3 \\ &= (2k+1)^2 \times (2k+1) \\ &= (4k^2 + 4k + 1)(2k+1) \\ &= 8k^3 + 8k^2 + 2k + 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 2\underbrace{\left(4k^3 + 6k^2 + 3k\right)}_{n \in \mathbb{Z}} + 1 \end{aligned}$$

Donc $a^3 = 2n + 1$ avec n entier donc a^3 est un entier impair.

Correction de l'exercice 5 : Vrai ou Faux 2

1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.

   Corrigé
   - Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 ;
   - Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18 ;
   - Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6 et ce sont aussi les diviseurs de 6
   - Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.

   Corrigé
   Affirmation 2 : Fausse
   4 admet trois diviseurs distincts : 1, 2 et 4.

3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.

   Corrigé
   Affirmation 3 : Fausse
   3 et 9 sont impairs et pourtant leurs diviseurs communs sont 1 et 3. Donc l'affirmation 3 est fausse.

4. **Affirmation 4** : Tous les nombres premiers sont impairs.

   Corrigé
   Affirmation 4 : Fausse : Tous les nombres premiers sont impairs.
   Par exemple 2 est premier car il n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même et pourtant il est pair. Donc l'affirmation 4 est fausse.

5. **Affirmation 5** : Tous les nombres impairs sont premiers.

   Corrigé
   Affirmation 5 : Fausse : Tous les nombres impairs sont premiers.
   Par exemple 9 est impair mais n'est pas premier car il a plus de 2 diviseurs qui sont : 1, 3 et 9. Donc l'affirmation 5 est fausse.

Correction de l'exercice 6 : factoriel

Prouver que $a = 100! + 97$ n'est pas premier.

Remarque

On note $n!$ (se lit « factoriel n ») le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, pour tout entier naturel $n > 0$. Par convention on définit :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Corrigé

$$\begin{aligned} a &= 100! + 97 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 96 \times \boxed{97} \times 98 \times 99 \times 100 + 97 \\ &= 97 \times \underbrace{(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 96 \times 98 \times 99 \times 100 + 1)}_{n \in \mathbb{Z}} \\ a &= 97n \end{aligned}$$

Donc $a = 97n$ avec n entier donc a est un entier divisible par 97, il n'est donc pas premier .

Correction de l'exercice 7 : Pagnol

Dans son ouvrage intitulé "Inédits", l'écrivain français Marcel Pagnol affirme que :

"*la somme de deux nombres impairs consécutifs et de leur produit est un nombre premier*".

Avait-il raison ?

Aide

Aide : Liste des premiers nombres premiers inférieurs à 200 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 et 199

Corrigé

« *la somme de deux nombres impairs consécutifs et de leur produit est un nombre premier* »

- On peut commencer par effectuer quelques tests :
  - $1+3+1\times 3=7$ et 7 est bien premier.
  - $3+5+3\times 5=23$ et 23 est bien premier.
  - $5+7+5\times 7=47$ et 47 est bien premier.
  - $7+9+7\times 9=79$ et 79 est bien premier.
  - $9+11+9\times 11=\underline{119=7\times 17}$ donc 119 n'est pas premier.
- Donc l'affirmation est fausse.
- Remarque : On peut chercher à exprimer cette expression.
  Un nombre impair est de la forme par exemple $2k-1$ (avec $k\in\mathbb{Z}$) et son suivant $2k+1$ donc la somme de deux nombres impairs consécutifs et de leur produit est :

  $$(2k-1)+(2k+1)+(2k-1)\times(2k+1)=4k+4k^2-1=\underline{4k^2+4k-1}$$

  On peut juste dire que ce nombre est impair car de la forme :

  $$4k^2+4k-1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{n\in\mathbb{Z}}-1=2n-1$$

Correction de l'exercice 8

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 *cm et* 225 *cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.*

1. Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté ? De 6 cm de côté ?

Corrigé

La taille d'un carreau doit être un diviseur commun de 108 et 225.

- 3 divise 108 et 225 donc Carole peut utiliser des carreaux de 3 cm de côté.

$$108 = 3 \times 36 \text{ et } 225 = 3 \times 75$$

- 6 divise 108 mais pas 225 donc Carole ne peut pas utiliser des carreaux de 6 cm de côté.

$$108 = 3 \times 186 \text{ et } 225 = 6 \times 37 + 3$$

2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser ? Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

Corrigé

- La taille N d'un carreau doit être un diviseur commun de 108 et 225. Or on cherche le plus grand possible, donc le PGCD de 108 et 225.
  Pour le déterminer, on écrit la décomposition de 108 et 225 en facteurs premiers, et on extrait les facteurs communs.

$$\begin{cases} 108 & = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ 225 & = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 108 & = 2 \times 2 \times \boxed{3 \times 3} \times 3 \\ 225 & = \boxed{3 \times 3} \times 5 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 108 & = \boxed{9} \times 12 \\ 225 & = \boxed{9} \times 25 \end{cases}$$

  Le Plus Grand Diviseur Commun des entiers 108 et 225 est donc 9.
  La dimension maximale des carreaux que Carole peut poser est donc de <u>9 cm</u>.
- **Combien de carreaux utilisera-t-elle ?**
  Elle utilisera donc 12 carreau en largeur et 25 en longueur soir au total : <u>$12 \times 25 = 300$ carreaux</u>.

Correction de l'exercice 9

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).

Corrigé

$$\begin{aligned} 756 &= 2\times 378 \\ &= 2\times 2\times 189 \\ &= 2\times 2\times 3\times 63 \\ &= 2\times 2\times 3\times 9\times 7 \\ 756 &= \underline{2^2\times 3^3\times 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 441 &= 3\times 147 \\ &= 3\times 3\times 49 \\ 441 &= \underline{3^2\times 7^2} \end{aligned}$$

2. Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.

Corrigé

On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :

$$\begin{cases} 756 = 2^2\times \boxed{3\times 3}\times 3\times \boxed{7} \\ 441 = \boxed{3\times 3\times 7}\times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 756 = \boxed{63}\times 12 \\ 441 = \boxed{63}\times 7 \end{cases} \Longrightarrow \underline{PGCD(441\ ;\ 756) = 63}$$

3. Rendre alors irréductible la fraction $\mathbf{\dfrac{756}{441}}$.

Corrigé

On divise numérateur et numérateur de la fraction par le PGCD pour la rendre irréductible :

$$\frac{756}{441} = \frac{756\div 63}{441\div 63} = \boxed{\frac{12}{7}}$$

Correction de l'exercice 11 : une affirmation

Choisir un nombre entier naturel à 3 chiffres et l'écrire deux fois côte à côte de façon à obtenir un nombre à 6 chiffres.
Affirmation : votre nombre est divisible par 91 et par 77. Prouvez cette affirmation.

Corrigé

Soit $x = cdu$ un nombre entier naturel à 3 chiffres. c, d et u sont donc des chiffres (entiers entre 0 et 9) avec c non nul.
On va l'écrire deux fois côte à côte de façon à obtenir un nombre à 6 chiffres noté : $y = cducdu$.

$$\begin{aligned} y &= cducdu \\ &= cdu000 + cdu \\ &= 1000 \times cdu + cdu \\ &= 1000x + x \\ &= 1001x \\ &= 7 \times 11 \times 13x \\ y &= 91 \times \underbrace{11x}_{k \in \mathbb{Z}} \\ y &= 77 \times \underbrace{13x}_{k' \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Donc y est bien divisible par 91 car de la forme $91k$ avec k entier et aussi par 77 car de la forme $77k'$ avec k' entier.

Remarque : y est aussi divisible par 7, 11, 13, 143, 1001.