Math93.com

TD 1 - Seconde
Expressions Algébriques, équations et systèmes

Table des matières

Partie I. Identités remarquables

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Exercice 1. Identités remarquables (c)

Compléter les égalités suivantes :

1. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 2x + \ldots\ldots.$
2. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 4x + \ldots\ldots.$
3. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 8x + \ldots\ldots.$
4. $(2x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + 4x + \ldots\ldots.$
5. $(3x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + 12x + \ldots\ldots.$
6. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 10x + \ldots\ldots.$
7. $(x - \ldots\ldots)(x + \ldots\ldots) = \ldots\ldots - 4.$
8. $(x - \ldots\ldots)(x + \ldots\ldots) = \ldots\ldots - 49.$
9. $(\ldots\ldots - 3)(\ldots\ldots + 3) = 4x^2 - \ldots\ldots.$

Exercice 2. Développer des identités remarquables (c)

Développer les expressions suivantes directement :

1. $(x-1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $(x+7)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $(x+5)(x-5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $(1-3x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $(2x-3)(2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $(3x-2)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $(8-x)(x+8) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $(-1+x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9. $(-2+5x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 3. Factoriser des identités remarquables (c)

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 - 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $x^2 + 12x + 36 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $x^2 - 16 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $4x^2 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $25x^2 + 20x + 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $x^2 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $x^2 - 6x + 9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $1 - 8x + 16x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9. $9 - 100x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 4. Kwyk

Faire le TD 6A de Kwyk pour vous tester.

Partie II. Quelques techniques algébriques : Factorisations

Exercice 5. Factorisations

Montrer avec une factorisation les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x-3)(1-4x)-(2x-3)^2=\underline{(2x-3)(-6x+4)}$$

2. Montrer que :

$$(2x-3)^2-(x+1)^2=\underline{(x-4)(3x-2)}$$

3. Montrer que :

$$(x+1)^2-(x-1)^2=\underline{4x}$$

Exercice 6. Avec une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x + 10 - (x+2)^2$$

1. Factoriser $5x + 10$.

2. En déduire une factorisation de $f(x)$.

3. Développer $f(x)$.

4. Calculer l'image par f de $\sqrt{2}+3$ en exprimant le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b des relatifs.

Exercice 7. Développements délicats (c)

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x-3)^2 - 3(x+1)(2-5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x+1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$

Exercice 8. Avec des fractions

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{6}{-2+x} + \frac{-8}{2+x}$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

1. b. Réduire au même dénominateur et simplifier l'expression de f

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{-3x}{-x+3} + \frac{8-2x}{-x^2+9}$$

2. a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

2. b. Réduire au même dénominateur et simplifier l'expression de g

Réponses

$f(x) = \dfrac{-2x+28}{x^2-4}$, $g(x) = \dfrac{-3x^2-11x+8}{9-x^2}$

Exercice 9. Kwyk

Faire le TD 6B de Kwyk pour vous tester.

Partie III. Astuces et fourberies

Exercice 10. Astuces et fourberies ! (c)

Astuces

- Ne pas confondre

$$\boxed{(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{3x^2 = 3 \times x \times x = 3 \times (x^2)}$$

- Ne pas confondre

$$\boxed{(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{-x^2 = -(x \times x) = -(x^2)}$$

- On a par ailleurs :

  ✓ $\boxed{(-a-b)^2 = (a+b)^2}$

  car $(-a-b)^2 = \Big(-1 \times (a+b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a+b)^2 = (a+b)^2$.

  ✓ $\boxed{(-a+b)^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2}$

  car $(-a+b)^2 = \Big(-1 \times (a-b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a-b)^2 = (a-b)^2$.

Exemple

- $(-3x+1)^2 = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- $(-3x-1)^2 = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4x)^2 = (4x)^2 = 16x^2 \geqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 = -(x)^2 = -\left(x^2\right) \leqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \geqslant 0$

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x-3)^2$

1. b. $A_2(x) = x - (-2x+5)^2$

1. c. $A_3(x) = (-x-1)^2 - (-x+2)^2$

1. d. $A_4(x) = -(-x+1)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x+4)^2 - (x+2)(x+3)$

2. b. $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x+2)(x+3)$

2. c. $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x+3)(x+1)$

2. d. $B_4(x) = x^2 + 2x - 3$

Astuce : $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4$

Exercice 11. SAT (Practice test 1, partie 4, Q36) (c)

Question 1 (SAT - Practice test 1 - section 4 - Q36)

$$h(x) = \frac{1}{(x-5)^2 + 4(x-5) + 4}$$

For what value of x is the function h above undefined ?

Partie IV. Calcul algébrique : premières applications

Exercice 12. Démontrer une égalité (c)

1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2 \right)$$

2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2 \right)$$

3. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{3x^2+2}{x^2+1} = 3 - \frac{1}{x^2+1}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 36x^2 - 12x + \frac{3}{4}$$

4. a. Montrer que la forme canonique (*vertex form*) de f est :

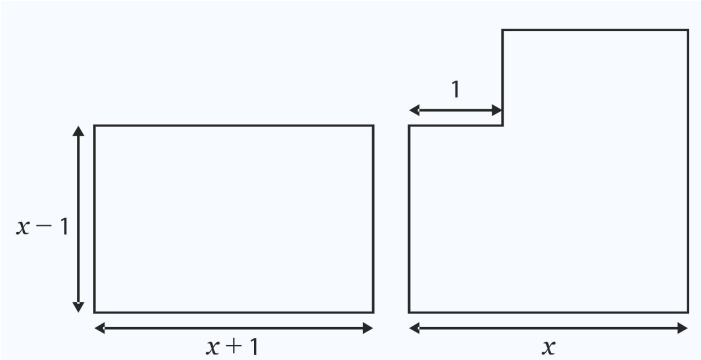
$$f(x) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

4. b. En déduire que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = \frac{3}{4}(4x-1)(12x-1)$$

Exercice 13. (Facultatif, niveau 3e) Un peu de géométrie (c)

ex 68 du livre



Dans un plan, on considère une unité de longueur donnée. Soient les deux figures suivantes : un rectangle dont les côtés mesurent $x - 1$ et $x + 1$ et un carré dont le côté mesure x et dans lequel on a enlevé un carré de 1 de côté.

1. À quel plus grand intervalle x peut-il appartenir ?

2. Montrer que, pour tout $x > 1$, ces deux figures ont la même aire.

Exercice 14. SAT (c)

Question 2 (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q13)

If $x > 3$, which of the following is equivalent to :

$$\frac{1}{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}}$$

a. $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$ **b.** $\dfrac{x^2+5x+6}{2x+5}$ **c.** $2x+5$ **d.** x^2+5x+6

Question 3 (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q15)

If

$$(ax+2)(bx+7)=15x^2+cx+14$$

for all values of x, and $a+b=8$, what are the two possible value for c ?

a. 3 and 5 **b.** 6 and 35 **c.** 10 and 21 **d.** 31 and 41

Exercice 15. Exprimer y en fonction de x ... déjà vu ? (c)

Soit x et y deux réels strictement positifs qui vérifient l'égalité :

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right)=1$$

1. Exprimer y en fonction de x sous la forme la plus réduite possible.
2. Application : donner le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% en expliquant votre démarche.

Exercice 16. Procédé d'identification des coefficients

Méthode d'identification

On va dans cet exercice mettre en oeuvre une méthode classique de factorisation de polynômes.
Elle consiste on va le voir en l'identification terme à termes des coefficients de même degré.
On va appliquer cette propriété admise :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

1. Soit f la fonction polynôme du second degré (*A quadratic function or a second degree polynomial function*) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

On cherche à trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(ax + b)$$

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + 2)(ax + b) = ax^2 + (2a + b)x + 2b$$

1. b. En déduire que :

$$a = 1 \ ; \ 2a + b = 5 \ \text{ et } \ 2b = 6$$

1. c. En déduire a et b puis la forme factorisée de f.

2. En utilisant une méthode similaire, trouver a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

Exercice 17. PPF : Minimum, maximum, majorant et minorant (**) : la on peut discuter !

Définition 1

1. **Majorant et maximum (*uper bound and maximum value*)** :
La fonction f est majorée sur I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $f(x) \leqslant M$.
On dit que M est UN majorant de f (il peut y en avoir une infinité).
Si ce majorant est atteint pour une valeur de $x = a$ de I, alors c'est le maximum de f sur I, c'est à dire la plus grande valeur possible des images de f sur I.

2. **Minorant et minimum (*lower bound and minimum value*)** :
La fonction f est minorée sur I , s' il existe un réel m tel que pour tout x de I , $f(x) \geqslant m$.
On dit que m est un minorant de f.
Si ce minorant est atteint pour une valeur de $x = a$ de I, alors c'est le minimum de f sur I, c'est à dire la plus petite valeur possible des images de f sur I.

Remarque

✓ Il faut bien différencier **minorant et minimum** de la fonction f sur I ;
Par exemple 1 est le minimum de $f : x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = 0$.
Et donc $0,5$; 0 ; -10 ; -20 ; $-\pi$ sont tous des minorants de f sur $\mathbb{R}$.

✓ De même, il faut bien différencier **majorant et maximum** de la fonction f sur I ;

1. Soit f la fonction définir sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -6x^2 + 4x - \frac{1}{6}$$

1. a. Montrer que pour tout réel x on a la forme canonique (*vertex form*) :

$$f(x) = -6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

1. b. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

2. Soit g la fonction définir sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$$

2. a. Montrer que pour tout réel x on a la forme canonique (*vertex form*) :

$$g(x) = 2\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{25}$$

2. b. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

Remarque

Respect total si vous obtenez la *vertex form* à partir de l'expression initiale !
Un paquet de Haribo à la clé dans ce cas avec l'exercice entièrement rédigé !

Partie V. Exprimer une variable en fonction d'autres

Exercice 18. D'après sujet 0 - spécialité 1

On considère $x,\ y, u$ des réels non nuls tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{u}$.
On peut affirmer que :

a. $u=\frac{xy}{x+y}$ **b.** $u=\frac{x+y}{xy}$ **c.** $u=xy$ **d.** $u=x+y$

Exercice 19. D'après sujet 0 - spécialité 2

Lorsqu'un point mobile suit une trajectoire circulaire de rayon R, en mètre (m), son accélération centripète a (en m/s^2) s'exprime en fonction de la vitesse v (en m/s) :

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

L'expression permettant d'exprimer la vitesse v est :

A. $v = aR^2$ **B.** $v = \sqrt{aR}$ **C.** $v = \sqrt{\frac{a}{R}}$ **D.** $v = \frac{a^2}{R}$

Exercice 20. Sujet 0 - Techno - 1

On considère la relation $C = (1+t)^2$. On cherche à isoler t. On a :

a. $t = \sqrt{C} - 1$ b. $t = \sqrt{C} - 1$ c. $t = \sqrt{1-C}$ d. $t = 1 - \sqrt{C}$

Partie VI. Résolution des équations

Exercice 21. Le warm up des équations (c)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (E_1) équation : $(x-2)^2 = 5x(x-2)$;

2. (E_2) équation : $(x-3)^2 = x(x-5)$;

3. (E_3) équation : $\dfrac{2}{3}x - 3 = \dfrac{1}{5}(x-2)$;

4. (E_4) équation : $x\sqrt{2} - 1 = x + 1$;

Exercice 22. Des équations à paramètre

1. On considère (E_k) l'équation suivante dans laquelle l'inconnue est le réel x :

$$k^2x + 7 = x - 2k$$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation en fonction de k.

1. b. Pour quelles valeurs de k n'existe-t-il pas de solution ?

2. Soit m un nombre réel.
On considère (E_m) l'équation suivante dans laquelle l'inconnue est le réel x :

$$5mx + 7 = x + m$$

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et discuter l'existence d'une solution selon la valeur de m.

Exercice 23. Conjecture et calcul (c)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.
2. Factoriser $h(x)$.
3. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 24. Équations et fractions

Méthode

On rappel que :

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff \begin{cases} A\times D = B\times C \\ \text{ et} \\ B\neq 0 \text{ et } D\neq 0\end{cases}}$$

Exemple 1 (Deux rédactions types sont proposées)

Résoudre : $(E_1)\ :\ \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}=0.$

1. **Valeurs interdites.**
Il faut que :
$$x^2-1\neq 0 \iff (x\neq 1) \text{ et } (x\neq -1)$$
On va alors résoudre l'équation sur l'ensemble des réels privé de 1 et de -1 ce qui se note $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 1\}$.

2. **Résolvons l'équation sur $I_1=\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 1\}$.**
Sur I_1 on a :
$$(E_1) \iff x^3-2x^2+x=0$$
$$(E_1) \iff x\left(x^2-2x+1\right)=0$$
$$(E_1) \iff x\left(x-1\right)^2=0$$
Un produit est nu si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :
$$(E_1) \iff (x=0) \text{ ou } (x-1=0)$$
$$(E_1) \iff (x=0\in I_1) \text{ ou } (x=1\notin I_1)$$

3. **Conclusion : on se ramène à l'intervalle I_1.**
Puisque $x=1\notin I_1$, l'équation (E_1) admet donc une unique solution, $\underline{x=0 \text{ sur l'intervalle } I_1}$.

Résoudre : $(E_2)\ :\ \dfrac{2x-3}{2-x}=\dfrac{3}{x}.$

1. **Valeurs interdites.**
Il faut que :
$$(2-x\neq 0) \text{ et } (x\neq 0) \iff (x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)$$

2. **Résolvons l'équation .**
On a :
$$(E_2)\iff \begin{cases}(x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)\\ (2x-3)\times x=(2-x)\times 3\end{cases}$$
$$(E_2)\iff \begin{cases}(x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)\\ 2x^2-3x=6-3x\end{cases}$$
$$(E_2)\iff \begin{cases}(x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)\\ 2x^2=6\end{cases}$$
$$(E_2)\iff \begin{cases}(x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)\\ x^2=3\end{cases}$$
$$(E_2)\iff \begin{cases}(x\neq 2) \text{ et } (x\neq 0)\\ (x=\sqrt{3}) \text{ ou } (x=-\sqrt{3})\end{cases}$$

3. **Conclusion.**.
L'équation (E_2) admet donc deux solutions, $\underline{x=\sqrt{3} \text{ et } x=-\sqrt{3}}$.

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé les valeurs interdites bien sûr.

1. $(E_1)\ :\ \dfrac{5x-2}{5-x}=\dfrac{2}{x}$
2. $(E_2)\ :\ \dfrac{(x+1)(x^2-6x+9)}{x^2-9}=0$
3. $(E_3)\ :\ \dfrac{x+1}{5+x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}$
4. $(E_2)\ :\ \dfrac{x^3-x}{5-x^2}=-x$

Exercice 25. Équations, sous toutes les formes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 \text{ et } g(x) = x^3 - 7x - 6$$

1. Pour la fonction f.

1. a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

1. b. En déduire les solutions de (E_1) l'équation : $f(x) = 0$.

1. c. Déterminer l'extremum (minimum ou maximum) de f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

2. Pour la fonction g.

2. a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$g(x) = (x-3)(x+2)(x+1)$$

2. b. En déduire les solutions (E_2) de l'équation : $g(x) = 0$.

3. On note (E_3) l'équation : $g(x) = f(x)$.

3. a. Montrer que :

$$(E_3) \Longleftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

3. b. Montrer que :

$$x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$$

3. c. En déduire les solutions de l'équation (E_3).

4. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre (E_4) l'équation : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

5. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre (E_5) l' équation : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Réponses

- ***1b.*** $S_1 = \{-1\ ;\ 2\}$; ***1c.*** *Le minimum de f est $-\frac{9}{4}$, atteint pour $x = \frac{1}{2}$.*
- ***2b.*** $S_2 = \{-2\ ;\ -1\ ;\ 3\}$.
- ***3c.*** $S_3 = \left\{\left(1-\sqrt{5}\right)\ ;\ -1\ ;\ \left(1+\sqrt{5}\right)\right\}$.
- ***4.*** $S_4 = \{2\}$.
- ***5.*** $S_5 = \left\{\left(1-\sqrt{5}\right)\ ;\ \left(1+\sqrt{5}\right)\right\}$.

Exercice 26. Bilan du Chapitre (c)

Cet exercice est intégralement corrigé en fin de TD.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer en développant que : $f\,(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$.

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que : $f\,(x) = (1-2\,x)\;(x-2)$.

3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$.

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

2. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

3. a. $(E_1) : f(x) = 0$;

3. b. $(E_2) : f(x) = \dfrac{9}{8}$;

3. c. $(E_3) : f(x) = (x - 2)$.

4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

Exercice 27. Avec de la trigo et un changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(E_1) : 2\cos^2 x = 1$
2. $(E_2) : 4\cos^2 x = 3$
3. $(E_3) : 4\sin^2 x = 1$
4. $(E_4) : \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x+1}\right) = 2$
5. $(E_5) : (2 - \cos x)(2 + \cos x) = 5$

Exercice 28. Algorithmique (c)

On considère les fonctions Python suivantes :

```
def g(x):
    return (x-5)**2-(-1+x)**2

def h(x):
    return 2*x-3

def f(x):
    if x>=0:
        return g(x)
    else:
        return h(x)
```

1. Que va renvoyer la fonction f si on entre dans la console $f(2)$ et $f(-2)$?
2. Que proposer comme valeur(s) pour x afin que la fonction f renvoie 0 ?
3. Montrer que si on entre dans la console $h(g(1))$, la fonction h va renvoyer 29.

```
# Dans la console PYTHON
>>> h(g(1))
29
```

4. Que va renvoyer la fonction g si on entre dans la console $g(h(1))$?
5. Que va renvoyer la fonction f si on entre dans la console $f(g(1))$?

Partie VII. Résolution de systèmes d'équations

Exercice 29. Quelques systèmes et Quelques fourberies (c)

Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$

2. $(S_2)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

3. $(S_3)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -3x-2y=-12 \end{cases}$

4. $(S_4)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{5}+y=1 \\ x+5y=-12 \end{cases}$

5. $(S_5)\ :\ \begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

6. $(S_6)\ :\ \begin{cases} x^2+3y=4 \\ x^2+6y=7 \end{cases}$

7. $(S_7)\ :\ \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2x^2-y^2=23 \end{cases}$

Réponses

$I_1\,(-1\,;\,2)$, $I_2\left(\dfrac{11}{4}\,;\,\dfrac{15}{8}\right)$, (S_3) a une infinité de solutions, (S_4) n'a pas de solution, $I_5\left(2\sqrt{2}+3\,;\,-\sqrt{2}-2\right)$, (S_6) a deux solutions
$I_6\,(-1\,;\,1)$ et $I'_6\,(1\,;\,1)$

Exercice 30. Quelques systèmes avec changement de variables (c)

1. On considère l'inconnue réelle x, supposée appartenir à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, et le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

En posant $u = \sin x$ et $v = \cos x$, on modélise ce système par un système linéaire en u et v.

Résoudre le système (S), en commençant par calculer le déterminant du système linéaire.

2. On considère l'inconnue réelle x, supposée appartenir à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, et le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} 2\cos x - 3\sin x = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} \\ 4\sin x + \cos x = -2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En posant $u = \sin x$ et $v = \cos x$, ce système devient un système linéaire en u et v.

Résoudre le système (S) en commençant par calculer le déterminant.

3. Résoudre pour x et y réels de $[0\ ;\ 2\pi[$ le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4\sin x - 2\cos y = 1 \end{cases}$$

Exercice 31. Quelques problèmes (c)

1. Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On compte 120 têtes et 298 pattes. Combien y a-t-il de lapins et de poules dans la ferme ?

2. Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes. Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes. Mme Martin a payé 18,5 euros alors que M. Bernard a payé 28,5 euros. Quel est le prix d'un kg de pommes et d'un kg de carottes ?

3. Max a 10 pièces dans son porte-monnaie. Ce sont uniquement des pièces de 1 euros et 2 euros. Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 euros. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

Exercice 32. PPF : Now we can talk !

Soit (S_m) les système suivant d'inconnues $(x\ ;\ y)$ et de paramètre m un réel.

$$\begin{cases} m\,x + 5y = 10 \\ 5x + m\,y = -3 \end{cases}$$

Discuter selon les valeur de m de l'existence d'une solution unique et résoudre le système.

Fin du TD

Partie VIII. Correction

Correction de l'exercice 1 page2

Réponses

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$, $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, $(x-4)^2 = x^2-8x+16$, $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$, $(3x+2)^2 = 9x^2+12x+4$
$(x-5)^2 = x^2-10x+25$, $(x-2)(x+2) = x^2-4$, $(x-7)(x+7) = x^2-49$, $(2x-3)(2x+3) = 4x^2-9$.

Correction de l'exercice 2 page2

Réponses

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$, $(x+7)^2 = x^2+14x+49$, $(x+5)(x+5) = x^2-25$, $(1-3x)^2 = 1-6x+9x^2$
$(2x-3)(2x+3) = 4x^2-9$, $(3x-2)^2 = 9x^2-12x+4$, $(8-x)(x+8) = 64-x^2$, $(-1+x)^2 = x^2-2x+1$, $(-2+5x)^2 = 25x^2-20x+4$.

Correction de l'exercice 3 page2

Réponses

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$, $(x+6)^2 = x^2+12x+36$, $(x-4)(x+4) = x^2-16$, $(2x+1)(2x-1) = 4x^2-1$
$(5x+2)^2 = 25x^2+20x+4$, $(x-1)(x+1) = x^2-1$, $(x-3)^2 = x^2-6x+9$, $(1-4x)^2 = 1-8x+16x^2$, $(3-10x)(3+10x) = 9-100x^2$.

Correction de l'exercice 7 page 5 : Développements délicats

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x-3)^2 - 3(x+1)(2-5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$

Corrigé

$$\begin{aligned}(2x-3)^2 - 3(x+1)(2-5x) &= 4x^2 - 12x + 9 - 3(2x - 5x^2 + 2 - 5x)\\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 15x^2 - 6 + 15x\\ &= \underline{19x^2 - 3x + 3}\end{aligned}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x+1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$

Corrigé

$$\begin{aligned}4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x+1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) &= 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(2x - \frac{x^2}{3} + 2 - \frac{x}{3}\right)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 - 6x + x^2 - 6 + x\\ &= \underline{5x^2 - 9x - 5}\end{aligned}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$

Corrigé

$$\begin{aligned}9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) &= 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)^2 - \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\\ &= 9x^2 - 6x + 1 - x^2 + \frac{1}{4}\\ &= \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 page 7 : astuces et fourberies

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x-3)^2 = x^2+6x+9$

Corrigé

$$A_1(x) = (-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2+6x+9$$

1. b. $A_2(x) = x-(-2x+5)^2 = -4x^2+21x-25$

Corrigé

$$\begin{aligned} A_2(x) &= x-(-2x+5)^2 \\ &= x-(2x-5)^2 \\ &= x-(4x^2-20x+25) \\ &= \underline{-4x^2+21x-25} \end{aligned}$$

1. c. $A_3(x) = (-x-1)^2-(-x+2)^2 = 6x-3$

Corrigé

$$\begin{aligned} A_3(x) = (-x-1)^2-(-x+2)^2 &= (x+1)^2-(x-2)^2 \\ &= x^2+2x+1-(x^2-4x+4) \\ &= x^2+2x+1-x^2+4x-4 \\ &= \underline{6x-3} \end{aligned}$$

1. d. $A_4(x) = -(-x+1)^2 = -(x-1)^2 = -x^2+2x-1$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x+4)^2-(x+2)(x+3) = (x+2)(3x+5)$

Corrigé

$$\begin{aligned} B_1(x) &= (2x+4)^2-(x+2)(x+3) \\ &= \Big(2(x+2)\Big)^2-(x+2)(x+3) \\ &= 4(x+2)^2-(x+2)(x+3) \\ &= (x+2)\Big(4(x+2)-(x+3)\Big) \\ &= (x+2)\Big(4x+8-x-3\Big) \\ &= \underline{(x+2)(3x+5)} \end{aligned}$$

2. b. $B_2(x) = x^2+2x+1-(2x+2)(x+3) = (x+1)(-x-5)$

Corrigé

$$\begin{aligned} B_2(x) = x^2+2x+1-(2x+2)(x+3) &= (x+1)^2 - 2(x+1)(x+3) \\ &= (x+1)\times\Big[(x+1)-2(x+3)\Big] \\ &= (x+1)\times\Big(x+1-2x-6\Big) \\ &= (x+1)(-x-5) \end{aligned}$$

2. c. $B_3(x) = 4x^2+4x+1-(6x+3)(x+1) = (-x-2)(2x+1)$

Corrigé

$$\begin{aligned} B_3(x) = 4x^2+4x+1-(6x+3)(x+1) &= (2x+1)^2 - 3(2x+1)(x+1) \\ &= (2x+1)\times\Big[(2x+1)-3(x+1)\Big] \\ &= (2x+1)\times\Big[2x+1-3x-3\Big] \\ &= (-x-2)(2x+1) \end{aligned}$$

2. d. $B_4(x) = x^2+2x-3 = (x^2+2x+1)-4 = (x+1)^2-2^2 = (x+3)(x-1)$

Corrigé

$$\begin{aligned} B_4(x) = x^2+2x-3 &= (x^2+2x+1)-4 \\ &= (x+1)^2-2^2 \\ &= \underline{(x+3)(x-1)} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 page 8 : SAT

Question 4 (SAT - Practice test 1 - section 4 - Q36)

$$h(x) = \frac{1}{(x-5)^2+4(x-5)+4}$$

For what value of x is the function h above undefined ?

Corrigé

The function is undefined when the denominator is equal to 0.
The expression $(x-5)^2+4(x-5)+4$ is a perfect square because :

$$(x-5)^2+4(x-5)+4 = \Big((x-5)+2\Big)^2 = (x-3)^2$$

And :

$$(x-3)^2 = 0 \iff x = 3$$

So the correct answer is 3.

Remarque

You can also expand the expression and then factorise :

$$(x-5)^2+4(x-5)+4 = x^2-10x+25+4x-10+4 = x^2-6x+9 = (x-3)^2$$

Correction de l'exercice 12 page 9 : Démontrer une égalité

1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}\left((x+y)^2+(x-y)^2\right)$$

Corrigé

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((x+y)^2+(x-y)^2\right)&=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2\right)\\&=\underline{x^2+y^2}\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$xy=\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)$$

Corrigé

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)&=\frac{1}{4}\left(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(4xy\right)\\&=\underline{xy}\end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{3x^2+2}{x^2+1}=3-\frac{1}{x^2+1}$$

Corrigé

Remarquons que cette égalité est définie pour toutes les valeurs de x. En effet, puisque $x^2\geqslant 0$, on a $x^2+1\geqslant 1$ et donc le dénominateur n'est jamais nul :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad ,x^2+1\neq 0$$

- Méthode 1 : on part du membre de droite.

$$\begin{aligned}3-\frac{1}{x^2+1}&=\frac{3(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\\&=\frac{3x^2+3-1}{x^2+1}\\&=\frac{3x^2+2}{x^2+1}\end{aligned}$$

• Méthode 2 : on part du membre de gauche, c'est plus joli.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+2}{x^2+1} &= \frac{3x^2+3-1}{x^2+1}\\ &= \frac{3x^2+3}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}\\ &= \frac{3(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\\ &= 3-\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 36x^2 - 12x + \frac{3}{4}$$

4. a. Montrer que :

$$f(x) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Corrigé

$$\begin{aligned}4\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} &= 4\left(9x^2-3x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\\ &= 36x^2-12x+1-\frac{1}{4}\\ &= 36x^2-12x+\frac{3}{4}\\ &= \underline{f(x)}\end{aligned}$$

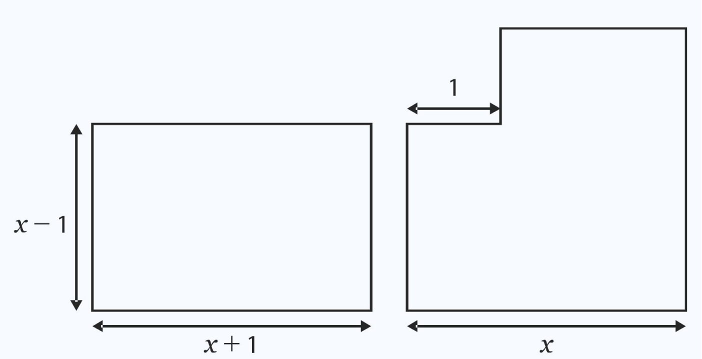
4. b. En déduire que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = \frac{3}{4}(4x-1)(12x-1)$$

Corrigé

$$\begin{aligned}f(x) &= 4\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\\ &= (6x-1)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \left(6x-1-\frac{1}{2}\right)\left(6x-1+\frac{1}{2}\right)\\ &= \underbrace{\left(6x-\frac{3}{2}\right)}\underbrace{\left(6x-\frac{1}{2}\right)}\\ &= \left(\frac{12x-3}{2}\right)\left(\frac{12x-1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(12x-3)(12x-1)\\ &= \frac{1}{4}3(4x-1)(12x-1)\\ &= \frac{3}{4}(4x-1)(12x-1)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 page 10 : géométrie



Dans un plan, on considère une unité de longueur donnée. Soient les deux figures suivantes : un rectangle dont les côtés mesurent $x-1$ et $x+1$ et un carré dont le côté mesure x et dans lequel on a enlevé un carré de 1 de côté.

1. À quel plus grand intervalle x peut-il appartenir ?

Corrigé

Les longueurs des côtés des figures sont des nombres réels strictement positifs. On doit donc avoir

$$x-1>0 \text{ et } x+1>0 \text{ et } x>0$$

soit encore :

$$\begin{cases} x>1 \\ \text{et } \ x>-1 \\ \text{et } \ x>0 \end{cases} \iff \boxed{x\in]1\,;\,+\infty[}$$

2. Montrer que, pour tout $x>1$, ces deux figures ont la même aire.

Corrigé

- La figure 1 est un rectangle, son aire est donc :

$$A_1(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$$

- La deuxième figure est un carré de côté x dont on a enlevé un carré de longueur 1.
  L'aire de cette deuxième figure est donc x

$$A_2(x)=x^2-1^1=x^2-1$$

- Conclusion : donc les deux aires sont toujours égales.

Correction de l'exercice 14 page 11 : SAT

Question 5 (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q13)

If $x>3$, which of the following is equivalent to :

$$\frac{1}{\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}}$$

a. $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$ **b.** $\dfrac{x^2+5x+6}{2x+5}$ **c.** $2x+5$ **d.** x^2+5x+6

Corrigé

$$\frac{1}{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}}=\frac{1}{\frac{x+3+x+2}{(x+2)(x+3)}}=\frac{(x+2)(x+3)}{2x+5}=\frac{x^2+5x+6}{2x+5}$$

Question 6 (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q15)

If

$$(ax+2)(bx+7)=15x^2+cx+14$$

for all values of x, and $a+b=8$, what are the two possible value for c ?

a. 3 and 5 **b.** 6 and 35 **c.** 10 and 21 **d.** 31 and 41

Corrigé

We can expand the left side of the equation to obtain :

$$(ax+2)(bx+7)=abx^2+(7a+2b)x+14$$

so

$$\begin{cases} abx^2+(7a+2b)x+14=15x^2+cx+14 \\ a+b=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 7a+2b=c \\ ab=15 \\ a+b=8 \end{cases}$$

So we have to find the values of a and b

$$\begin{cases} ab=15 \\ a+b=8 \end{cases} \iff \begin{cases} a(8-a)=15 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} -a^2+8a-15=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-8a+15=0 \\ b=8-a \end{cases}$$

then

$$\begin{cases} a^2-8a+15=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} (a-3)(a-5)=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \text{ or } a=5 \\ b=8-a \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} a=3 \text{ or } a=5 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \text{ or } b=5 \\ a=5 \text{ or } b=3 \end{cases}$$

Therefore, the two possible values for c are 31 and 41 since $c=7a+2b$

Correction de l'exercice 15 page 12

Soit x et y deux réels strictement positifs qui vérifient l'égalité :

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right)=1$$

1. Exprimer y en fonction de x sous la forme la plus réduite possible.

Corrigé

On peut diviser les deux membres par le facteur $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$ car il est non nul puisque $x>0$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right)=1 &\iff \left(1-\frac{y}{100}\right)=\frac{1}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff -\frac{y}{100}=\frac{1}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}-1\\
&\iff \frac{y}{100}=-\frac{1}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}+1=1-\frac{1}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff y=100-\frac{100}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff y=\frac{100\left(1+\frac{x}{100}\right)}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}-\frac{100}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff y=\frac{100+x-100}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff y=\frac{x}{\left(1+\frac{x}{100}\right)}\\
&\iff y=\frac{100x}{\left(1+\frac{x}{100}\right)\times 100}\\
&\iff \boxed{y=\frac{100x}{100+x}}
\end{aligned}$$

2. Application : donner le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% en expliquant votre démarche.

Corrigé

Le taux d'évolution réciproque à une augmentation de $x\%$ est $y\%$ où y vérifie l'égalité :

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)=1 \iff y=-\frac{100x}{100+x}$$

Donc le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% est :

$$\boxed{y=-\frac{100\times 30}{100+30}\approx -23,0769\%}$$

Correction de l'exercice 21 page 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (E_1) équation : $(x-2)^2 = 5x(x-2)$;

Corrigé

On va factoriser :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff (x-2)^2 = 5x(x-2)\\ &\iff (x-2)^2 - 5x(x-2) = 0\\ &\iff (x-2)(x-2) - 5x(x-2) = 0\\ &\iff (x-2)\Big[(x-2) - 5x\Big] = 0\\ &\iff (x-2)\Big[-4x-2\Big] = 0\\ &\iff \Big(x-2=0\Big) \text{ ou } \Big(-4x-2=0\Big)\\ &\iff \boxed{x = 2 \text{ ou } x = \frac{-1}{2}}\end{aligned}$$

2. (E_2) équation : $(x-3)^2 = x(x-5)$;

Corrigé

Pas de factorisation possible, donc on tente de développer. On remarque rapidement que les termes en x^2 vont s'éliminer.

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff (x-3)^2 = x(x-5)\\ &\iff (x-3)^2 - x(x-5) = 0\\ &\iff x^2 - 6x + 9 - x^2 + 5x = 0\\ &\iff -x + 9 = 0\\ &\iff \boxed{x = 9}\end{aligned}$$

3. (E_3) équation : $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{5}(x-2)$;

Corrigé

$$(E_3) \iff \frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{5}(x-2)$$

On multiplie tout par 3 et 5 donc par 15 pour s'affranchir des fractions

$$\begin{aligned}&\iff \left(\frac{2}{3}x - 3\right) \times 15 = \frac{1}{5}(x-2) \times 15\\ &\iff 10x - 45 = 3(x-2)\\ &\iff 10x - 45 = 3x - 6\\ &\iff 10x - 3x = -6 + 45\\ &\iff 7x = 39\\ &\iff \boxed{x = \frac{39}{7}}\end{aligned}$$

4. (E_4) équation : $x\sqrt{2}-1=x+1$;

Corrigé

$$\begin{aligned}
(E_3) &\iff x\sqrt{2}-1=x+1\\
&\iff x\sqrt{2}-x=2\\
&\iff x\left(\sqrt{2}-1\right)=2\\
&\iff x=\frac{2}{\left(\sqrt{2}-1\right)}\\
&\iff x=\frac{2\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)}\\
&\iff x=\frac{2\sqrt{2}+2}{2-1}\\
&\iff \boxed{x=2\sqrt{2}+2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 23 page 20

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.

2. Factoriser $h(x)$.

Corrigé

$$h(x) = x(4x^2 - 24x + 36) = 4x(x^2 - 6x + 9) = \underline{4x(x-3)^2}$$

3. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.

Corrigé

Les abscisses les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses sont les solution de l'équation $h(x) = 0$.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff 4x(x-3)^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

$S = \{0 ; 3\}$

Correction de l'exercice 26

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$.

Partie A : Écrire et transformer

1. **Montrer en développant que : $f(x) = \underline{-2\,x^2 + 5\,x - 2}$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - \left(3 - 3x - 6x + 6x^2\right) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 \\ f(x) &= \underline{-2\,x^2 + 5\,x - 2} \end{aligned}$$

2. **Montrer <u>à l'aide d'une factorisation</u> que : $f(x) = \underline{(1-2\,x)\;(x-2)}$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= (1-2x)^2 - 3(1-2x)(1-x) \\ &= (1-2x)\Big[(1-2x) - 3(1-x)\Big] \\ &= (1-2x)\Big[1 - 2x - 3 + 3x\Big] \\ f(x) &= \underline{(1-2x)(-2+x)} \end{aligned}$$

3. **Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \underline{-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}$.**

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}\,x + \frac{25}{16}\right) + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5\,x - \frac{25}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - 2 \\ &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. **Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.**

En utilisant la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(1 - 2\,\times\frac{1}{2}\right)}_{0} \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

En utilisant la forme (3.)

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -2\underbrace{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right)^2}_{0} + \frac{9}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}}$$

2. **Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.**

En utilisant la forme développée :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -2\,\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5\,\left(\sqrt{2}\right) - 2 = -4 + 5\,\left(\sqrt{2}\right) - 2 = \underline{5\sqrt{2} - 6}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$f(x) = 0$

$\iff (1-2\,x)\ \ (x-2) = 0$
$\iff \Big(1-2\,x=0\Big)$ ou $\Big(x-2=0\Big)$
$\iff \left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ ou $\Big(x=2\Big)$

Les solutions de (E_1) sont $\dfrac{1}{2}$ et 2 .

$f(x) = \dfrac{9}{8}$

$\iff -2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8} = \dfrac{9}{8}$
$\iff -2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 = 0$
$\iff \left(x-\dfrac{5}{4}\right) = 0$
$\iff x = \dfrac{5}{4}$

La solution de (E_2) est $\dfrac{5}{4}$.

$f(x) = (x-2)$

$\iff (1-2\,x)\ \ (x-2) = (x-2)$
$\iff (1-2\,x)\ \ (x-2) - (x-2) = 0$
$\iff (x-2)\Big((1-2x)-1\Big) = 0$
$\iff (x-2)(-2x) = 0$
$\iff \Big(x-2=0\Big)$ ou $\Big(-2x=0\Big)$
$\iff \Big(x=2\Big)$ ou $\Big(x=0\Big)$

Les solutions de (E_3) sont 0 et 2 .

4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.
D'après la question A3 on a que pour tout réel x :

$$f(x) = -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

Pour tout réel x, l'expression $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2$ est positive ou nul donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 \geqslant 0$$

En multipliant par $(-2) < 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 \leqslant 0$$

Et donc en ajoutant $\dfrac{9}{8}$ de chaque côté :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \underbrace{-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}_{f(x)} \leqslant \frac{9}{8}$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) \leqslant \frac{9}{8}$$

Le nombre $\dfrac{9}{8}$ est donc un majorant de f sur $\mathbb{R}$, or d'après la question B1, il est atteint pour $x = \dfrac{5}{4}$, c'est donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 28 : Algorithmique

On considère les fonctions Python suivantes :

```
def g(x):
    return (x-5)**2-(-1+x)**2

def h(x):
    return 2*x-3

def f(x):
    if x>=0:
        return g(x)
    else:
        return h(x)
```

1. Que va renvoyer la fonction si on entre dans la console $f(2)$ et $f(-2)$?

Corrigé

- Si on entre dans la console $f(2)$, puisque 2 est positif on obtient :

$$f(2) = g(2) = (2-5)^2 - (-1+2)^2 = (-3)^2 - 1^2 = \underline{8}$$

- Si on entre dans la console $f(-2)$, puisque (-2) est négatif on obtient :

$$f(-2) = h(-2) = 2 \times (-2) - 3 = \underline{-7}$$

2. Que proposer comme valeur(s) pour x afin que la fonction f renvoie 0 ?

Corrigé

On va résoudre les deux équations et vérifier si les résultats sont cohérents.

- Cas $x \geqslant 0$.
  Si on suppose que x est positif ou nul, alors l'expression de $f(x)$ est $g(x)$ donc :
  Par factorisation on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ (x-5)^2 - (-1+x)^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \Big(x-5-(-1+x)\Big)\Big(x-5+(-1+x)\Big) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ -4\Big(2x-6\Big) = 0 \end{cases} \\
&\iff x = 3 \in [0\,;+\infty[
\end{aligned}$$

  Donc cette solution est valable car positive.

- Cas $x < 0$.
  Si on suppose que x est négatif strictement, alors l'expression de f est

$$f(x) = h(x) = 2x - 3$$

Et l'on a :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x < 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x < 0 \\ x = \dfrac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

Donc cette solution n'est pas valide car on avait supposé que x était strictement négatif.

- Conclusion : pour que la fonction renvoie 0 , on peut prendre comme valeur, $x = 3$ uniquement.

Correction de l'exercice 29 page 27 : systèmes

Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$

Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases} \iff \begin{cases} (2x+3y)\times(-2) = 4\times(-2) \\ 5x+6y=7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4x-6y=-8 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$$

On garde la 1re équation et on ajoute le 1re à la 2e

$$\iff \begin{cases} -4x-6y=-8 \\ x+0=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4\times(-1)-6y=-8 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -6y=-12 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}}$$

2. $(S_2)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)\times 6 = 2\times 6 \\ -x+2y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+2y=12 \\ -x+2y=1 \end{cases}$$

on soustrait la 1re ligne à la 2e

$$\iff \begin{cases} 3x+2y=12 \\ -4x+0=-11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+2y=12 \\ x=\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\times\dfrac{11}{4}+2y=12 \\ x=\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{33}{4}+2y=12 \\ x=\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y=12-\dfrac{33}{4}=\dfrac{15}{4} \\ x=\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} y=\dfrac{15}{8} \\ x=\dfrac{11}{4} \end{cases}}$$

3. $(S_3)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -3x-2y=-12 \end{cases}$

Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_3=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-1+1=0$$

Donc le système n'admet pas une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_3) \iff \begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)\times(-6)=2\times(-6) \\ -3x-2y=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x-2y=-12 \\ -3x-2y=-12 \end{cases} \iff -3x-2y=-12$$

Donc les deux équations sont en fait identiques, le système admet une infinité de solutions.

4. $(S_4)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{5}+y=1 \\ x+5y=-12 \end{cases}$

Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_4=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=1-1=0$$

Donc le système n'admet pas une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_4) \iff \begin{cases} \left(\dfrac{x}{5}+y\right)\times(5) = 2\times(5) \\ x+5y=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} x+5y=10 \\ x+5y=-12 \end{cases}$$

Donc de façon évidente, ce système n'admet donc pas de solution.

5. $(S_5)\ :\ \begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-\sqrt{2} \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$\begin{aligned}
(S_4) &\iff \begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ x=-1-2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (-1-2y)+\sqrt{2}y=1 \\ x=-1-2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \left(\sqrt{2}-2\right)y=2 \\ x=-1-2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=\dfrac{2}{\sqrt{2}-2}=-2-\sqrt{2} \\ \\ x=-1-2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-2-\sqrt{2} \\ \\ x=-1-2\times\left(-2-\sqrt{2}\right) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-2-\sqrt{2} \\ x=-1+4+2\sqrt{2} \end{cases} \\
&\iff \boxed{\begin{cases} y=-2-\sqrt{2} \\ x=3+2\sqrt{2} \end{cases}}
\end{aligned}$$

6. $(S_6)\ :\ \begin{cases} x^2+3y=4 \\ x^2+6y=7 \end{cases}$

7. $(S_7)\ :\ \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2x^2-y^2=23 \end{cases}$

Réponses

$I_1\,(-1\ ;\ 2)$, $I_2\left(\dfrac{11}{4}\ ;\ \dfrac{15}{8}\right)$, (S_3) a une infinité de solutions, (S_4) n'a pas de solution, $I_5\left(2\sqrt{2}+3\ ;\ -\sqrt{2}-2\right)$, (S_6) a deux solutions
$I_6\,(-1\ ;\ 1)$ et $I'_6\,(1\ ;\ 1)$

Correction de l'exercice 30 : systèmes

1. On considère l'inconnue réelle x, supposée appartenir à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, et le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

En posant $u = \sin x$ et $v = \cos x$, on modélise ce système par un système linéaire en u et v.

Résoudre le système (S), en commençant par calculer le déterminant du système linéaire.

Corrigé

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x.$$

Le système (S) devient alors le système linéaire suivant en (u, v) :

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ u - v = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \cdot u + 1 \cdot v = \sqrt{2} \\ 1 \cdot u - 1 \cdot v = 0 \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2.$$

Comme $\Delta = -2 \neq 0$, le système est de Cramer et admet donc une unique solution (u, v).

Résolution par combinaisons linéaires

Or on sait que $u = v$ donc on a directement

$$u = v = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient donc l'unique solution du système linéaire :

$$\boxed{u = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Par retour aux inconnues trigonométriques :

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{avec } x \in \left]-\pi\ ;\ \pi\right].$$

Sur le cercle trigonométrique, on sait que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x \in \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\} \text{ dans } \left]-\pi\ ;\ \pi\right],$$

et

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x \in \left\{-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right\} \text{ dans } \left]-\pi\ ;\ \pi\right].$$

Pour que le système (S) soit vérifié, x doit appartenir simultanément aux deux ensembles de solutions. On cherche donc l'intersection :

$$\left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\} \cap \left\{-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ainsi, dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, le système (S) admet une unique solution :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}.}$$

2. On considère l'inconnue réelle x, supposée appartenir à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2\cos x - 3\sin x = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} \\ 4\sin x + \cos x = -2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En posant $u = \sin x$ et $v = \cos x$, ce système devient un système linéaire en u et v.

Résoudre le système (S) en commençant par calculer le déterminant.

Corrigé

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x.$$

Le système (S) devient alors :

$$\begin{cases} -3u + 2v = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} \\ 4u + v = -2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1 - 2 \cdot 4 = -3 - 8 = -11.$$

Comme $\Delta = -11 \neq 0$, le système est de Cramer : il admet une unique solution.

Résolution.
On multiplie la deuxième équation par 2 puis on soustrait aux coefficients de la première pour éliminer v :
Équation (2)x2 :

$$8u + 2v = -4 + \sqrt{3}.$$

On soustrait avec (1) :

$$(-3u + 2v) - (8u + 2v) = -11u = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(-4 + \sqrt{3}\right).$$

Cela donne :

$$u = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$u = \sin x = -\frac{1}{2}, \qquad v = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Retour à l'angle x.
On doit résoudre :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{avec } x \in]-\pi\ ;\ \pi].$$

Sur le cercle trigonométrique :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6}.$$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution :

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{6}.}$$

3. Résoudre pour x et y réels de $[0\ ;\ 2\pi[$ le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4\sin x - 2\cos y = 1 \end{cases}$$

Corrigé

On cherche les couples réels (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4\sin x - 2\cos y = 1 \end{cases}$$

1. Mise en place d un système linéaire.

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos y.$$

Le système devient alors un système linéaire en u et v :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 4u - 2v = 1 \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 1 \times 4 = -2 - 4 = -6.$$

Comme $\Delta = -6 \neq 0$, le système est de Cramer et admet donc une unique solution (u, v).

2. Résolution du système linéaire.

On peut utiliser des combinaisons linéaires.

On multiplie la première équation par 2 :

$$2u + 2v = 2.$$

On ajoute à la deuxième équation :

$$(4u - 2v) + (2u + 2v) = 1 + 2 \quad \Longrightarrow \quad 6u = 3.$$

Donc :

$$u = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

On remplace ensuite u dans la première équation :

$$u + v = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + v = 1 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{2}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}.}$$

Par définition de u et v :

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos y = \frac{1}{2}.$$

3. Résolution trigonométrique dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

On se place dans l intervalle usuel $[0\ ;\ 2\pi[$.

- Équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

  On sait que $\sin x = \frac{1}{2}$ pour les angles de référence $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Ainsi :

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

- Équation $\cos y = \frac{1}{2}$ dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

  On sait que $\cos y = \frac{1}{2}$ pour les angles de référence $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. Ainsi :

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

4. Ensemble des solutions du système.

Les valeurs possibles de x et y se combinent librement : toute paire

$$(x, y) \in \left\{ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6} \right\} \times \left\{ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3} \right\}$$

est solution du système (S).

On obtient donc les quatre solutions suivantes dans $[0\ ;\ 2\pi[$:

$$\boxed{\begin{cases} (x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right) \\ (x, y) = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \\ (x, y) = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right) \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 31 : Problèmes et systèmes

1. Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On compte 120 têtes et 298 pattes. Combien y a-t-il de lapins et de poules dans la ferme ?

Corrigé

- Étape 1 : On pose le problème en équations.
  Notons x le nombre de lapins et y le nombre de poules.
  On a alors les deux équations suivantes. $4x + 2y = 298$ et $x + y = 120$.
  On obtient donc le système suivant :
  $$\begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ x + y = 120 \end{cases}$$
- Étape 2 : Calcul du déterminant.
  $$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$
  Donc le système admet une solution unique.
- Étape 3 : Résolution.
  $$\begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ x + y = 120 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ y = 120 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2(120 - x) = 298 \\ y = 120 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 29 \\ y = 91 \end{cases}$$
- Étape 4 : Conclusion.
  Il y a 29 lapins et 91 poules dans la ferme.

2. Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes. Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes. Mme Martin a payé 18,5 euros alors que M. Bernard a payé 28,5 euros. Quel est le prix d'un kg de pommes et d'un kg de carottes ?

Corrigé

- Étape 1 : On pose le problème en équations.
  Notons x le prix d'un kilogramme de pommes et y le prix d'un kilogramme de carottes.
  On obtient donc le système suivant :
  $$\begin{cases} 5x + 2y = 18,5 \\ 3x + 7y = 28,5 \end{cases}$$
- Étape 2 : Calcul du déterminant.
  $$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 6 = 29 \neq 0$$
  Donc le système admet une solution unique.

- Étape 3 : Résolution.

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2y=18,5 \\ 3x+7y=28,5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (5x+2y)\times 3=18,5\times 3 \\ (3x+7y)\times 5=28,5\times 5 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 15x+6y=55,5 \\ 15x+35y=142,5 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 15x+6y=55,5 \\ 29y=87 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 15x+6y=55,5 \\ y=3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 15x+6\times 3=55,5 \\ y=3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2,5 \\ y=3 \end{array}\right.$$

- Étape 4 : Conclusion.
  Les pommes coûtent 2,5 euros le kilogramme et les carottes 3 euros le kilogramme.

3. Max a 10 pièces dans son porte-monnaie. Ce sont uniquement des pièces de 1 euros et 2 euros. Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 euros. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

Corrigé

- Étape 1 : On pose le problème en équations.
  Notons x le nombre de pièces de 1 euros et y le nombre de pièces de 2 euros.
  On a alors : $x+y=10$ et $x+2y=5$.
  On obtient donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=10 \\ x+2y=15 \end{array}\right.$$

- Étape 2 : Calcul du déterminant.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$$

  Donc le système admet une solution unique.

- Étape 3 : Résolution.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=10 \\ x+2y=15 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10-y \\ x+2y=15 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10-y \\ (10-y)+2y=15 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=5 \end{array}\right.$$

- Étape 4 : Conclusion.

  Max a donc 5 pièces de 1 euros et 5 pièces de 2 euros.