



Math93.com

# TD 1 - Seconde

## Expressions Algébriques, équations et systèmes

---

### Table des matières

---

<b>I</b>	<b>Identités remarquables</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Quelques techniques algébriques : Factorisations</b>	<b>3</b>
<b>III</b>	<b>Astuces et fourberies</b>	<b>4</b>
<b>IV</b>	<b>Calcul algébrique : premières applications</b>	<b>5</b>
<b>V</b>	<b>Exprimer une variable en fonction d'autres</b>	<b>8</b>
<b>VI</b>	<b>Résolution des équations</b>	<b>9</b>
<b>VII</b>	<b>Résolution de systèmes d'équations</b>	<b>14</b>
<b>VIII</b>	<b>Correction</b>	<b>16</b>

## Partie I. Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### Exercice 1. Identités remarquables (c)

Compléter les égalités suivantes :

1.  $(x - \dots)^2 = \dots - 2x + \dots$

2.  $(x - \dots)^2 = \dots - 4x + \dots$

3.  $(x - \dots)^2 = \dots - 8x + \dots$

4.  $(2x + \dots)^2 = \dots + 4x + \dots$

5.  $(3x + \dots)^2 = \dots + 12x + \dots$

6.  $(x - \dots)^2 = \dots - 10x + \dots$

7.  $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 4$

8.  $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 49$

9.  $(\dots - 3)(\dots + 3) = 4x^2 - \dots$

### Exercice 2. Développer des identités remarquables (c)

Développer les expressions suivantes directement :

1.  $(x - 1)^2 = \dots$

2.  $(x + 7)^2 = \dots$

3.  $(x + 5)(x - 5) = \dots$

4.  $(1 - 3x)^2 = \dots$

5.  $(2x - 3)(2x + 3) = \dots$

6.  $(3x - 2)^2 = \dots$

7.  $(8 - x)(x + 8) = \dots$

8.  $(-1 + x)^2 = \dots$

9.  $(-2 + 5x)^2 = \dots$

### Exercice 3. Factoriser des identités remarquables (c)

Factoriser les expressions suivantes :

1.  $x^2 - 2x + 1 = \dots$

2.  $x^2 + 12x + 36 = \dots$

3.  $x^2 - 16 = \dots$

4.  $4x^2 - 1 = \dots$

5.  $25x^2 + 20x + 4 = \dots$

6.  $x^2 - 1 = \dots$

7.  $x^2 - 6x + 9 = \dots$

8.  $1 - 8x + 16x^2 = \dots$

9.  $9 - 100x^2 = \dots$

### Exercice 4. Kwyk

Faire le TD 6A de Kwyk pour vous tester.

## Partie II. Quelques techniques algébriques : Factorisations

### Exercice 5. Factorisations

Montrer avec une factorisation les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x - 3)(1 - 4x) - (2x - 3)^2 = \underline{(2x - 3)(-6x + 4)}$$

2. Montrer que :

$$(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 = \underline{(x - 4)(3x - 2)}$$

3. Montrer que :

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = \underline{4x}$$

### Exercice 6. Avec une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 5x + 10 - (x + 2)^2$$

1. Factoriser  $5x + 10$ .

2. En déduire une factorisation de  $f(x)$ .

3. Développer  $f(x)$ .

4. Calculer l'image par  $f$  de  $\sqrt{2} + 3$  en exprimant le résultat sous la forme  $a + b\sqrt{2}$ , avec  $a$  et  $b$  des relatifs.

### Exercice 7. Développements délicats (c)

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x - 3)^2 - 3(x + 1)(2 - 5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x + 1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$

### Exercice 8. Avec des fractions

1. Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{6}{-2 + x} + \frac{-8}{2 + x}$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

1. b. Réduire au même dénominateur et simplifier l'expression de  $f$

2. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{-3x}{-x + 3} + \frac{8 - 2x}{-x^2 + 9}$$

2. a. Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .

2. b. Réduire au même dénominateur et simplifier l'expression de  $g$



#### Réponses

$$f(x) = \frac{-2x + 28}{x^2 - 4}, g(x) = \frac{-3x^2 - 11x + 8}{9 - x^2}$$

### Exercice 9. Kwyk

Faire le TD 6B de Kwyk pour vous tester.

## Partie III. Astuces et fourberies

### Exercice 10. Astuces et fourberies! (c)



#### Astuces

- Ne pas confondre

$$\boxed{(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{3x^2 = 3 \times x \times x = 3 \times (x^2)}$$

- Ne pas confondre

$$\boxed{(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{-x^2 = -(x \times x) = -(x^2)}$$

- On a par ailleurs :

$$\checkmark \quad \boxed{(-a - b)^2 = (a + b)^2}$$

$$\text{car } (-a - b)^2 = (-1 \times (a + b))^2 = (-1)^2 \times (a + b)^2 = (a + b)^2.$$

$$\checkmark \quad \boxed{(-a + b)^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2}$$

$$\text{car } (-a + b)^2 = (-1 \times (a - b))^2 = (-1)^2 \times (a - b)^2 = (a - b)^2.$$



#### Exemple

- $(-3x + 1)^2 = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- $(-3x - 1)^2 = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4x)^2 = (4x)^2 = 16x^2 \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 = -(x)^2 = -(x^2) \leq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \geq 0$

1. Développer les expressions suivantes :

1. a.  $A_1(x) = (-x - 3)^2$

1. b.  $A_2(x) = x - (-2x + 5)^2$

1. c.  $A_3(x) = (-x - 1)^2 - (-x + 2)^2$

1. d.  $A_4(x) = -(-x + 1)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a.  $B_1(x) = (2x + 4)^2 - (x + 2)(x + 3)$

2. b.  $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x + 2)(x + 3)$

2. c.  $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x + 3)(x + 1)$

2. d.  $B_4(x) = x^2 + 2x - 3$

Astuce :  $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4$

### Exercice 11. SAT (Practice test 1, partie 4, Q36) (c)

#### Question 1 (SAT - Practice test 1 - section 4 - Q36)

$$h(x) = \frac{1}{(x - 5)^2 + 4(x - 5) + 4}$$

For what value of  $x$  is the function  $h$  above undefined?

## Partie IV. Calcul algébrique : premières applications

### Exercice 12. Démontrer une égalité (c)

1. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \left( (x + y)^2 + (x - y)^2 \right)$$

2. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$xy = \frac{1}{4} \left( (x + y)^2 - (x - y)^2 \right)$$

3. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} = 3 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

4. Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 36x^2 - 12x + \frac{3}{4}$$

4. a. Montrer que la forme canonique (*vertex form*) de  $f$  est :

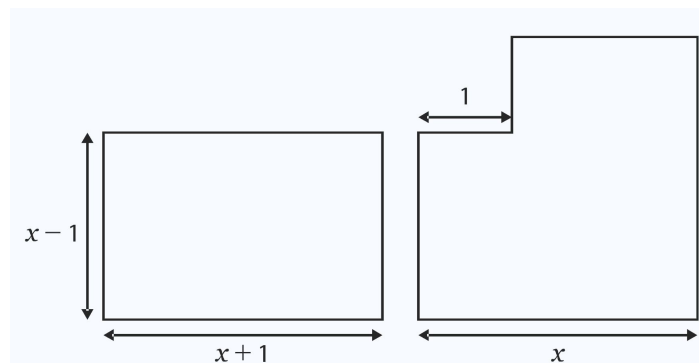
$$f(x) = 4 \left( 3x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

4. b. En déduire que la forme factorisée de  $f$  est :

$$f(x) = \frac{3}{4} (4x - 1)(12x - 1)$$

### Exercice 13. (Facultatif, niveau 3e) Un peu de géométrie (c)

ex 68 du livre



Dans un plan, on considère une unité de longueur donnée. Soient les deux figures suivantes : un rectangle dont les côtés mesurent  $x - 1$  et  $x + 1$  et un carré dont le côté mesure  $x$  et dans lequel on a enlevé un carré de 1 de côté.

- À quel plus grand intervalle  $x$  peut-il appartenir ?
- Montrer que, pour tout  $x > 1$ , ces deux figures ont la même aire.

### Exercice 14. SAT (c)

#### Question 2 (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q13)

If  $x > 3$ , which of the following is equivalent to :

$$\frac{1}{\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}}$$

a.  $\frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6}$

b.  $\frac{x^2 + 5x + 6}{2x + 5}$

c.  $2x + 5$

d.  $x^2 + 5x + 6$

**Question 3** (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q15)

If

$$(ax + 2)(bx + 7) = 15x^2 + cx + 14$$

for all values of  $x$ , and  $a + b = 8$ , what are the two possible value for  $c$ ?

- a. 3 and 5                      b. 6 and 35                      c. 10 and 21                      d. 31 and 41

**Exercice 15. Exprimer  $y$  en fonction de  $x$  ... déjà vu ? (c)**Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs qui vérifient l'égalité :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1$$

- Exprimer  $y$  en fonction de  $x$  sous la forme la plus réduite possible.
- Application : donner le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% en expliquant votre démarche.

**Exercice 16. Procédé d'identification des coefficients****Méthode d'identification**

On va dans cet exercice mettre en oeuvre une méthode classique de factorisation de polynômes.

Elle consiste on va le voir en l'identification terme à termes des coefficients de même degré.

On va appliquer cette propriété admise :

**Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.**

- Soit  $f$  la fonction polynôme du second degré (*A quadratic function or a second degree polynomial function*) définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

On cherche à trouver deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(ax + b)$$

- a. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(x + 2)(ax + b) = ax^2 + (2a + b)x + 2b$$

- b. En déduire que :

$$a = 1 ; 2a + b = 5 \text{ et } 2b = 6$$

- c. En déduire  $a$  et  $b$  puis la forme factorisée de  $f$ .

- En utilisant une méthode similaire, trouver  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

**Exercice 17. PPF : Minimum, maximum, majorant et minorant (\*\*): la on peut discuter !****Définition 1****1. Majorant et maximum (*upper bound and maximum value*) :**

La fonction  $f$  est majorée sur  $I$ , s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq M$ .

On dit que  $M$  est UN majorant de  $f$  (il peut y en avoir une infinité).

Si ce majorant est atteint pour une valeur de  $x = a$  de  $I$ , alors c'est le maximum de  $f$  sur  $I$ , c'est à dire la plus grande valeur possible des images de  $f$  sur  $I$ .

**2. Minorant et minimum (*lower bound and minimum value*) :**

La fonction  $f$  est minorée sur  $I$ , s' il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \geq m$ .

On dit que  $m$  est un minorant de  $f$ .

Si ce minorant est atteint pour une valeur de  $x = a$  de  $I$ , alors c'est le minimum de  $f$  sur  $I$ , c'est à dire la plus petite valeur possible des images de  $f$  sur  $I$ .

**Remarque**

- ✓ Il faut bien différencier **minorant et minimum** de la fonction  $f$  sur  $I$  ;  
Par exemple 1 est le minimum de  $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Il est atteint pour  $x = 0$ .  
Et donc 0, 5 ; 0 ; -10 ; -20 ;  $-\pi$  sont tous des minorants de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ✓ De même, il faut bien différencier **majorant et maximum** de la fonction  $f$  sur  $I$  ;

1. Soit  $f$  la fonction définir sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -6x^2 + 4x - \frac{1}{6}$$

1. a. Montrer que pour tout réel  $x$  on a la forme canonique (*vertex form*) :

$$f(x) = -6 \left( x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

1. b. En déduire le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et le réel pour lequel il est atteint.

2. Soit  $g$  la fonction définir sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$$

2. a. Montrer que pour tout réel  $x$  on a la forme canonique (*vertex form*) :

$$g(x) = 2 \left( x - \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{2}{25}$$

2. b. En déduire le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et le réel pour lequel il est atteint.

**Remarque**

- Respect total si vous obtenez la *vertex form* à partir de l'expression initiale !  
Un paquet de Haribo à la clé dans ce cas avec l'exercice entièrement rédigé !

## Partie V. Exprimer une variable en fonction d'autres

### Exercice 18. D'après sujet 0 - spécialité 1

---

On considère  $x, y, u$  des réels non nuls tels que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u}$ .

On peut affirmer que :

a.  $u = \frac{xy}{x+y}$

b.  $u = \frac{x+y}{xy}$

c.  $u = xy$

d.  $u = x + y$

### Exercice 19. D'après sujet 0 - spécialité 2

---

Lorsqu'un point mobile suit une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , en mètre (m), son accélération centripète  $a$  (en  $\text{m/s}^2$ ) s'exprime en fonction de la vitesse  $v$  (en m/s) :

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

L'expression permettant d'exprimer la vitesse  $v$  est :

A.  $v = aR^2$

B.  $v = \sqrt{aR}$

C.  $v = \sqrt{\frac{a}{R}}$

D.  $v = \frac{a^2}{R}$

### Exercice 20. Sujet 0 - Techno - 1

---

On considère la relation  $C = (1 + t)^2$ . On cherche à isoler  $t$ . On a :

a.  $t = \sqrt{C} - 1$

b.  $t = \sqrt{C} + 1$

c.  $t = \sqrt{1 - C}$

d.  $t = 1 - \sqrt{C}$



## Partie VI. Résolution des équations

### Exercice 21. Le warm up des équations (c)

---

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $(E_1)$  équation :  $(x - 2)^2 = 5x(x - 2)$ ;

2.  $(E_2)$  équation :  $(x - 3)^2 = x(x - 5)$ ;

3.  $(E_3)$  équation :  $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{5}(x - 2)$ ;

4.  $(E_4)$  équation :  $x\sqrt{2} - 1 = x + 1$ ;

### Exercice 22. Des équations à paramètre

---

1. On considère  $(E_k)$  l'équation suivante dans laquelle l'inconnue est le réel  $x$  :

$$k^2x + 7 = x - 2k$$

1. a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  cette équation en fonction de  $k$ .

1. b. Pour quelles valeurs de  $k$  n'existe-t-il pas de solution ?

2. Soit  $m$  un nombre réel.

On considère  $(E_m)$  l'équation suivante dans laquelle l'inconnue est le réel  $x$  :

$$5mx + 7 = x + m$$

Résoudre cette équation dans  $\mathbb{R}$  et discuter l'existence d'une solution selon la valeur de  $m$ .

### Exercice 23. Conjecture et calcul (c)

---

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe des abscisses.

2. Factoriser  $h(x)$ .

3. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe des abscisses.

## Exercice 24. Équations et fractions

**Méthode**

On rappelle que :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff \begin{cases} A \times D = B \times C \\ \text{et} \\ B \neq 0 \text{ et } D \neq 0 \end{cases}$$

**Exemple 1** (Deux rédactions types sont proposées)

Résoudre :  $(E_1) : \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} = 0.$

**1. Valeurs interdites.**

Il faut que :

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff (x \neq 1) \text{ et } (x \neq -1)$$

On va alors résoudre l'équation sur l'ensemble des réels privé de 1 et de  $-1$  ce qui se note  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .**2. Résolvons l'équation sur  $I_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .**Sur  $I_1$  on a :

$$(E_1) \iff x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$(E_1) \iff x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(E_1) \iff x(x-1)^2 = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$(E_1) \iff (x = 0) \text{ ou } (x - 1 = 0)$$

$$(E_1) \iff (x = 0 \in I_1) \text{ ou } (x = 1 \notin I_1)$$

**3. Conclusion : on se ramène à l'intervalle  $I_1$ .**Puisque  $x = 1 \notin I_1$ , l'équation  $(E_1)$  admet donc une unique solution,  $x = 0$  sur l'intervalle  $I_1$ .

Résoudre :  $(E_2) : \frac{2x - 3}{2 - x} = \frac{3}{x}.$

**1. Valeurs interdites.**

Il faut que :

$$(2 - x \neq 0) \text{ et } (x \neq 0) \iff (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0)$$

**2. Résolvons l'équation .**

On a :

$$(E_2) \iff \begin{cases} (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0) \\ (2x - 3) \times x = (2 - x) \times 3 \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0) \\ 2x^2 - 3x = 6 - 3x \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0) \\ 2x^2 = 6 \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0) \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

$$(E_2) \iff \begin{cases} (x \neq 2) \text{ et } (x \neq 0) \\ (x = \sqrt{3}) \text{ ou } (x = -\sqrt{3}) \end{cases}$$

**3. Conclusion..**L'équation  $(E_2)$  admet donc deux solutions,  $x = \sqrt{3}$  et  $x = -\sqrt{3}$ .

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé les valeurs interdites bien sûr.

1.  $(E_1) : \frac{5x - 2}{5 - x} = \frac{2}{x}$

2.  $(E_2) : \frac{(x+1)(x^2 - 6x + 9)}{x^2 - 9} = 0$

3.  $(E_3) : \frac{x+1}{5+x^2} = \frac{x+1}{x^2}$

4.  $(E_2) : \frac{x^3 - x}{5 - x^2} = -x$

**Exercice 25. Équations, sous toutes les formes**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 \text{ et } g(x) = x^3 - 7x - 6$$

1. Pour la fonction  $f$ .

1. a. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

1. b. En déduire les solutions de  $(E_1)$  l'équation :  $f(x) = 0$ .

1. c. Déterminer l'extremum (minimum ou maximum) de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et le réel pour lequel il est atteint.

2. Pour la fonction  $g$ .

2. a. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$g(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 1)$$

2. b. En déduire les solutions  $(E_2)$  de l'équation :  $g(x) = 0$ .

3. On note  $(E_3)$  l'équation :  $g(x) = f(x)$ .

3. a. Montrer que :

$$(E_3) \iff (x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

3. b. Montrer que :

$$x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5$$

3. c. En déduire les solutions de l'équation  $(E_3)$ .

4. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre  $(E_4)$  l'équation :  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

5. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre  $(E_5)$  l'équation :  $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ .

**Réponses**

- **1b.**  $S_1 = \{-1; 2\}$ ; **1c.** Le minimum de  $f$  est  $-\frac{9}{4}$ , atteint pour  $x = \frac{1}{2}$ .
- **2b.**  $S_2 = \{-2; -1; 3\}$ .
- **3c.**  $S_3 = \{(1 - \sqrt{5}); -1; (1 + \sqrt{5})\}$ .
- **4.**  $S_4 = \{2\}$ .
- **5.**  $S_5 = \{(1 - \sqrt{5}); (1 + \sqrt{5})\}$ .

**Exercice 26. Bilan du Chapitre (c)**

---

Cet exercice est intégralement corrigé en fin de TD.

Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x)$$

**Partie A : Écrire et transformer**

1. Montrer en développant que :  $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ .
2. Montrer à l'aide d'une factorisation que :  $f(x) = (1 - 2x)(x - 2)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  :  $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ .

**Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes**

1. Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $f\left(\frac{5}{4}\right)$ .
2. Montrer que  $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 6$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :
 

3. a. $(E_1) : f(x) = 0;$	3. b. $(E_2) : f(x) = \frac{9}{8};$	3. c. $(E_3) : f(x) = (x - 2).$
---------------------------	-------------------------------------	---------------------------------
4. Déterminer le maximum de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et le réel pour lequel il est atteint.

**Exercice 27. Avec de la trigo et un changement de variable**

---

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $(E_1) : 2 \cos^2 x = 1$
2.  $(E_2) : 4 \cos^2 x = 3$
3.  $(E_3) : 4 \sin^2 x = 1$
4.  $(E_4) : \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = 2$
5.  $(E_5) : (2 - \cos x)(2 + \cos x) = 5$

**Exercice 28. Algorithmique (c)**

---

On considère les fonctions Python suivantes :

```
1 def g(x):
2     return (x-5)**2-(-1+x)**2
3
4 def h(x):
5     return 2*x-3
6
7 def f(x):
8     if x>=0:
9         return g(x)
10    else:
11        return h(x)
```

1. Que va renvoyer la fonction  $f$  si on entre dans la console  $f(2)$  et  $f(-2)$  ?
2. Que proposer comme valeur(s) pour  $x$  afin que la fonction  $f$  renvoie 0 ?
3. Montrer que si on entre dans la console  $h(g(1))$ , la fonction  $h$  va renvoyer 29.

```
# Dans la console PYTHON
>>> h(g(1))
29
```

4. Que va renvoyer la fonction  $g$  si on entre dans la console  $g(h(1))$  ?
5. Que va renvoyer la fonction  $f$  si on entre dans la console  $f(g(1))$  ?

## Partie VII. Résolution de systèmes d'équations

### Exercice 29. Quelques systèmes et Quelques fourberies (c)

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. (S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$2. (S_2) : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$3. (S_3) : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ -3x - 2y = -12 \end{cases}$$

$$4. (S_4) : \begin{cases} \frac{x}{5} + y = 1 \\ x + 5y = -12 \end{cases}$$

$$5. (S_5) : \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$6. (S_6) : \begin{cases} x^2 + 3y = 4 \\ x^2 + 6y = 7 \end{cases}$$

$$7. (S_7) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$$



#### Réponses



$I_1(-1; 2)$ ,  $I_2\left(\frac{11}{4}; \frac{15}{8}\right)$ ,  $(S_3)$  a une infinité de solutions,  $(S_4)$  n'a pas de solution,  $I_5(2\sqrt{2} + 3; -\sqrt{2} - 2)$ ,  $(S_6)$  a deux solutions

$I_6(-1; 1)$  et  $I'_6(1; 1)$

### Exercice 30. Quelques systèmes avec changement de variables (c)

1. On considère l'inconnue réelle  $x$ , supposée appartenir à l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ , et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

En posant  $u = \sin x$  et  $v = \cos x$ , on modélise ce système par un système linéaire en  $u$  et  $v$ .

**Résoudre le système (S), en commençant par calculer le déterminant du système linéaire.**

2. On considère l'inconnue réelle  $x$ , supposée appartenir à l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ , et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2 \cos x - 3 \sin x = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 4 \sin x + \cos x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En posant  $u = \sin x$  et  $v = \cos x$ , ce système devient un système linéaire en  $u$  et  $v$ .

**Résoudre le système (S) en commençant par calculer le déterminant.**

3. Résoudre pour  $x$  et  $y$  réels de  $[0; 2\pi[$  le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x - 2 \cos y = 1 \end{cases}$$

**Exercice 31. Quelques problèmes (c)**

---

1. Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On compte 120 têtes et 298 pattes. Combien y a-t-il de lapins et de poules dans la ferme ?
2. Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes. Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes. Mme Martin a payé 18,5 euros alors que M. Bernard a payé 28,5 euros. Quel est le prix d'un kg de pommes et d'un kg de carottes ?
3. Max a 10 pièces dans son porte-monnaie. Ce sont uniquement des pièces de 1 euro et 2 euros. Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 euros. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

**Exercice 32. PPF : Now we can talk!**

---

Soit  $(S_m)$  le système suivant d'inconnues  $(x ; y)$  et de paramètre  $m$  un réel.

$$\begin{cases} mx + 5y = 10 \\ 5x + my = -3 \end{cases}$$

Discuter selon les valeurs de  $m$  de l'existence d'une solution unique et résoudre le système.

←P **Fin du TD** ↗

## Partie VIII. Correction

### Correction de l'exercice 1 page2

---



#### Réponses

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16, (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1, (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4 \\ & (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25, (x-2)(x+2) = x^2 - 4, (x-7)(x+7) = x^2 - 49, (2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 2 page2

---



#### Réponses

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49, (x+5)(x+5) = x^2 - 25, (1-3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2 \\ & (2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9, (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4, (8-x)(x+8) = 64 - x^2, (-1+x)^2 = x^2 - 2x + 1, \\ & (-2+5x)^2 = 25x^2 - 20x + 4. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 3 page2

---



#### Réponses

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36, (x-4)(x+4) = x^2 - 16, (2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1 \\ & (5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4, (x-1)(x+1) = x^2 - 1, (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9, (1-4x)^2 = 1 - 8x + 16x^2, \\ & (3-10x)(3+10x) = 9 - 100x^2. \end{aligned}$$



**Correction de l'exercice 7 page 3 : Développements délicats**

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x - 3)^2 - 3(x + 1)(2 - 5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$



**Corrigé**

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 - 3(x + 1)(2 - 5x) &= 4x^2 - 12x + 9 - 3(2x - 5x^2 + 2 - 5x) \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 15x^2 - 6 + 15x \\ &= \underline{19x^2 - 3x + 3} \end{aligned}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x + 1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$



**Corrigé**

$$\begin{aligned} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x + 1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) &= 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(2x - \frac{x^2}{3} + 2 - \frac{x}{3}\right) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - 6x + x^2 - 6 + x \\ &= \underline{5x^2 - 9x - 5} \end{aligned}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$



**Corrigé**

$$\begin{aligned} 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) &= 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= 9x^2 - 6x + 1 - x^2 + \frac{1}{4} \\ &= \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

## Correction de l'exercice 10 page 4 : astuces et fourberies

1. Développer les expressions suivantes :

1. a.  $A_1(x) = (-x - 3)^2 = x^2 + 6x + 9$



Corrigé

$$A_1(x) = (-x - 3)^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

1. b.  $A_2(x) = x - (-2x + 5)^2 = -4x^2 + 21x - 25$



Corrigé

$$\begin{aligned} A_2(x) &= x - (-2x + 5)^2 \\ &= x - (2x - 5)^2 \\ &= x - (4x^2 - 20x + 25) \\ &= \underline{-4x^2 + 21x - 25} \end{aligned}$$

1. c.  $A_3(x) = (-x - 1)^2 - (-x + 2)^2 = 6x - 3$



Corrigé

$$\begin{aligned} A_3(x) &= (-x - 1)^2 - (-x + 2)^2 = (x + 1)^2 - (x - 2)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4) \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 \\ &= \underline{6x - 3} \end{aligned}$$

1. d.  $A_4(x) = -(-x + 1)^2 = -(x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a.  $B_1(x) = (2x + 4)^2 - (x + 2)(x + 3) = (x + 2)(3x + 5)$



Corrigé

$$\begin{aligned} B_1(x) &= (2x + 4)^2 - (x + 2)(x + 3) \\ &= \left(2(x + 2)\right)^2 - (x + 2)(x + 3) \\ &= 4(x + 2)^2 - (x + 2)(x + 3) \\ &= (x + 2)\left(4(x + 2) - (x + 3)\right) \\ &= (x + 2)\left(4x + 8 - x - 3\right) \\ &= \underline{(x + 2)(3x + 5)} \end{aligned}$$

2. b.  $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x + 2)(x + 3) = (x + 1)(-x - 5)$

**Corrigé**

$$\begin{aligned}
 B_2(x) &= x^2 + 2x + 1 - (2x + 2)(x + 3) = (x + 1)^2 - 2(x + 1)(x + 3) \\
 &= (x + 1) \times [(x + 1) - 2(x + 3)] \\
 &= (x + 1) \times (x + 1 - 2x - 6) \\
 &= (x + 1)(-x - 5)
 \end{aligned}$$

2. c.  $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x + 3)(x + 1) = (-x - 2)(2x + 1)$

**Corrigé**

$$\begin{aligned}
 B_3(x) &= 4x^2 + 4x + 1 - (6x + 3)(x + 1) = (2x + 1)^2 - 3(2x + 1)(x + 1) \\
 &= (2x + 1) \times [(2x + 1) - 3(x + 1)] \\
 &= (2x + 1) \times [2x + 1 - 3x - 3] \\
 &= (-x - 2)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

2. d.  $B_4(x) = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 3)(x - 1)$

**Corrigé**

$$\begin{aligned}
 B_4(x) &= x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 \\
 &= (x + 1)^2 - 2^2 \\
 &= \underline{(x + 3)(x - 1)}
 \end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 11 page 4 : SAT****Question 4 (SAT - Practice test 1 - section 4 - Q36)**

$$h(x) = \frac{1}{(x - 5)^2 + 4(x - 5) + 4}$$

For what value of  $x$  is the function  $h$  above undefined?

**Corrigé**

The function is undefined when the denominator is equal to 0.

The expression  $(x - 5)^2 + 4(x - 5) + 4$  is a perfect square because :

$$(x - 5)^2 + 4(x - 5) + 4 = ((x - 5) + 2)^2 = (x - 3)^2$$

And :

$$(x - 3)^2 = 0 \iff x = 3$$

So the correct answer is 3.

**Remarque**

You can also expand the expression and then factorise :

$$(x - 5)^2 + 4(x - 5) + 4 = x^2 - 10x + 25 + 4x - 20 + 4 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

**Correction de l'exercice 12 page 5 : Démontrer une égalité**

1. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \left( (x + y)^2 + (x - y)^2 \right)$$

**Corrigé**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( (x + y)^2 + (x - y)^2 \right) &= \frac{1}{2} \left( x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2x^2 + 2y^2 \right) \\ &= \underline{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$xy = \frac{1}{4} \left( (x + y)^2 - (x - y)^2 \right)$$

**Corrigé**

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left( (x + y)^2 - (x - y)^2 \right) &= \frac{1}{4} \left( x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( 4xy \right) \\ &= \underline{xy} \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} = 3 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

**Corrigé**

Remarquons que cette égalité est définie pour toutes les valeurs de  $x$ . En effet, puisque  $x^2 \geq 0$ , on a  $x^2 + 1 \geq 1$  et donc le dénominateur n'est jamais nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

- Méthode 1 : on part du membre de droite.

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{x^2 + 1} &= \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{3x^2 + 3 - 1}{x^2 + 1} \\ &= \underline{\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

- Méthode 2 : on part du membre de gauche, c'est plus joli.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} &= \frac{3x^2 + 3 - 1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{3x^2 + 3}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

4. Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 36x^2 - 12x + \frac{3}{4}$$

4. a. Montrer que :

$$f(x) = 4 \left( 3x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$



### Corrigé

$$\begin{aligned}4 \left( 3x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} &= 4 \left( 9x^2 - 3x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \\ &= 36x^2 - 12x + 1 - \frac{1}{4} \\ &= 36x^2 - 12x + \frac{3}{4} \\ &= \underline{f(x)}\end{aligned}$$

4. b. En déduire que la forme factorisée de  $f$  est :

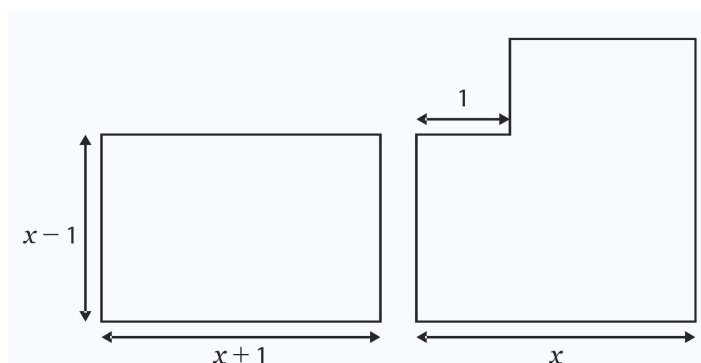
$$f(x) = \frac{3}{4} (4x - 1)(12x - 1)$$



### Corrigé

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \left( 3x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= (6x - 1)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \left( 6x - 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 6x - 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \underbrace{\left( 6x - \frac{3}{2} \right)} \underbrace{\left( 6x - \frac{1}{2} \right)} \\ &= \left( \frac{12x - 3}{2} \right) \left( \frac{12x - 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (12x - 3)(12x - 1) \\ &= \frac{1}{4} 3(4x - 1)(12x - 1) \\ &= \frac{3}{4} (4x - 1)(12x - 1)\end{aligned}$$

## Correction de l'exercice 13 page 5 : géométrie



Dans un plan, on considère une unité de longueur donnée. Soient les deux figures suivantes : un rectangle dont les côtés mesurent  $x - 1$  et  $x + 1$  et un carré dont le côté mesure  $x$  et dans lequel on a enlevé un carré de 1 de côté.

1. À quel plus grand intervalle  $x$  peut-il appartenir ?


**Corrigé**

Les longueurs des côtés des figures sont des nombres réels strictement positifs. On doit donc avoir

$$x - 1 > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \text{ et } x > 0$$

soit encore :

$$\begin{cases} x > 1 \\ \text{et } x > -1 \\ \text{et } x > 0 \end{cases} \iff x \in ]1 ; +\infty[$$

2. Montrer que, pour tout  $x > 1$ , ces deux figures ont la même aire.


**Corrigé**

- La figure 1 est un rectangle, son aire est donc :

$$A_1(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

- La deuxième figure est un carré de côté  $x$  dont on a enlevé un carré de longueur 1.  
L'aire de cette deuxième figure est donc  $x^2 - 1$

$$A_2(x) = x^2 - 1^1 = x^2 - 1$$

- Conclusion : donc les deux aires sont toujours égales.

## Correction de l'exercice 14 page 5 : SAT

**Question 5** (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q13)

If  $x > 3$ , which of the following is equivalent to :

$$\frac{1}{\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}}$$

a.  $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$

b.  $\frac{x^2+5x+6}{2x+5}$

c.  $2x+5$

d.  $x^2+5x+6$

**Corrigé**

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+3+x+2} = \frac{(x+2)(x+3)}{2x+5} = \frac{x^2+5x+6}{2x+5}$$

**Question 6** (SAT - Practice test 1 - section 3 - Q15)

If

$$(ax+2)(bx+7) = 15x^2 + cx + 14$$

for all values of  $x$ , and  $a+b=8$ , what are the two possible value for  $c$ ?

- a. 3 and 5                      b. 6 and 35                      c. 10 and 21                      d. 31 and 41

**Corrigé**

We can expand the left side of the equation to obtain :

$$(ax+2)(bx+7) = abx^2 + (7a+2b)x + 14$$

so

$$\begin{cases} abx^2 + (7a+2b)x + 14 = 15x^2 + cx + 14 \\ a+b=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 7a+2b=c \\ ab=15 \\ a+b=8 \end{cases}$$

So we have to find the values of  $a$  and  $b$ 

$$\begin{cases} ab=15 \\ a+b=8 \end{cases} \iff \begin{cases} a(8-a)=15 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} -a^2+8a-15=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-8a+15=0 \\ b=8-a \end{cases}$$

then

$$\begin{cases} a^2-8a+15=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} (a-3)(a-5)=0 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \text{ or } a=5 \\ b=8-a \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} a=3 \text{ or } a=5 \\ b=8-a \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \text{ or } b=5 \\ a=5 \text{ or } b=3 \end{cases}$$

Therefore, the two possible values for  $c$  are 31 and 41 since  $c=7a+2b$ **Correction de l'exercice 15 page 6**Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs qui vérifient l'égalité :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1$$

1. Exprimer  $y$  en fonction de  $x$  sous la forme la plus réduite possible.

**Corrigé**

On peut diviser les deux membres par le facteur  $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$  car il est non nul puisque  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1 &\iff \left(1 - \frac{y}{100}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff -\frac{y}{100} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} - 1 \\ &\iff \frac{y}{100} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} + 1 = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff y = 100 - \frac{100}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff y = \frac{100 \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} - \frac{100}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff y = \frac{100 + x - 100}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff y = \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)} \\ &\iff y = \frac{100x}{\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times 100} \\ &\iff \boxed{y = \frac{100x}{100 + x}} \end{aligned}$$

2. Application : donner le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% en expliquant votre démarche.

**Corrigé**

Le taux d'évolution réciproque à une augmentation de  $x\%$  est  $y\%$  où  $y$  vérifie l'égalité :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{y}{100}\right) = 1 \iff y = -\frac{100x}{100 + x}$$

Donc le taux d'évolution réciproque à une augmentation de 30% est :

$$\boxed{y = -\frac{100 \times 30}{100 + 30} \approx -23,0769\%}$$



## Correction de l'exercice 21 page 9

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $(E_1)$  équation :  $(x - 2)^2 = 5x(x - 2)$ ;



## Corrigé

On va factoriser :

$$\begin{aligned}
 (E_1) &\iff (x - 2)^2 = 5x(x - 2) \\
 &\iff (x - 2)^2 - 5x(x - 2) = 0 \\
 &\iff (x - 2)(x - 2) - 5x(x - 2) = 0 \\
 &\iff (x - 2)[(x - 2) - 5x] = 0 \\
 &\iff (x - 2)[-4x - 2] = 0 \\
 &\iff (x - 2 = 0) \text{ ou } (-4x - 2 = 0) \\
 &\iff \boxed{x = 2 \text{ ou } x = \frac{-1}{2}}
 \end{aligned}$$

2.  $(E_2)$  équation :  $(x - 3)^2 = x(x - 5)$ ;



## Corrigé

Pas de factorisation possible, donc on tente de développer. On remarque rapidement que les termes en  $x^2$  vont s'éliminer.

$$\begin{aligned}
 (E_2) &\iff (x - 3)^2 = x(x - 5) \\
 &\iff (x - 3)^2 - x(x - 5) = 0 \\
 &\iff x^2 - 6x + 9 - x^2 + 5x = 0 \\
 &\iff -x + 9 = 0 \\
 &\iff \boxed{x = 9}
 \end{aligned}$$

3.  $(E_3)$  équation :  $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{5}(x - 2)$ ;



## Corrigé

On multiplie tout par 3 et 5 donc par 15 pour s'affranchir des fractions

$$\begin{aligned}
 (E_3) &\iff \frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{5}(x - 2) \\
 &\iff \left(\frac{2}{3}x - 3\right) \times 15 = \frac{1}{5}(x - 2) \times 15 \\
 &\iff 10x - 45 = 3(x - 2) \\
 &\iff 10x - 45 = 3x - 6 \\
 &\iff 10x - 3x = -6 + 45 \\
 &\iff 7x = 39 \\
 &\iff \boxed{x = \frac{39}{7}}
 \end{aligned}$$

4.  $(E_4)$  équation :  $x\sqrt{2} - 1 = x + 1$ ;



### Corrigé

$$\begin{aligned}(E_3) &\Leftrightarrow x\sqrt{2} - 1 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{2} - x = 2 \\ &\Leftrightarrow x(\sqrt{2} - 1) = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{(\sqrt{2} - 1)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \times (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 1} \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = 2\sqrt{2} + 2}\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 23 page 9**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe des abscisses.
2. Factoriser  $h(x)$ .

**Corrigé**

$$h(x) = x(4x^2 - 24x + 36) = 4x(x^2 - 6x + 9) = \underline{4x(x - 3)^2}$$

3. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe des abscisses.

**Corrigé**

Les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_h$  avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation  $h(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff 4x(x - 3)^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

$$S = \{0 ; 3\}$$

**Correction de l'exercice 26**

Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x)$ .

**Partie A : Écrire et transformer**

1. Montrer en développant que :  $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - (3 - 3x - 6x + 6x^2) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 \\ f(x) &= -2x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que :  $f(x) = (1 - 2x)(x - 2)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x) \\ &= (1 - 2x)^2 - 3(1 - 2x)(1 - x) \\ &= (1 - 2x)[(1 - 2x) - 3(1 - x)] \\ &= (1 - 2x)[1 - 2x - 3 + 3x] \\ f(x) &= (1 - 2x)(-2 + x) \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout réel  $x$  :  $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ .

Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned} -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - \frac{25}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

**Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes**

1. Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $f\left(\frac{5}{4}\right)$ .

En utilisant la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(1 - 2 \times \frac{1}{2}\right)}_0 \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

En utilisant la forme (3.)

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -2 \underbrace{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right)^2}_0 + \frac{9}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}}$$

2. Montrer que  $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 6$ .

En utilisant la forme développée :

$$f(\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 + 5(\sqrt{2}) - 2 = -4 + 5(\sqrt{2}) - 2 = \underline{5\sqrt{2} - 6}$$

**3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :**

$f(x) = 0$ $\Leftrightarrow (1 - 2x)(x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow (1 - 2x = 0) \text{ ou } (x - 2 = 0)$ $\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2}\right) \text{ ou } (x = 2)$	$f(x) = \frac{9}{8}$ $\Leftrightarrow -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$ $\Leftrightarrow -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$	$f(x) = (x - 2)$ $\Leftrightarrow (1 - 2x)(x - 2) = (x - 2)$ $\Leftrightarrow (1 - 2x)(x - 2) - (x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)((1 - 2x) - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)(-2x) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2 = 0) \text{ ou } (-2x = 0)$ $\Leftrightarrow (x = 2) \text{ ou } (x = 0)$
Les solutions de $(E_1)$ sont $\frac{1}{2}$ et 2.	La solution de $(E_2)$ est $\frac{5}{4}$ .	Les solutions de $(E_3)$ sont 0 et 2.

**4. Déterminer le maximum de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et le réel pour lequel il est atteint.**

D'après la question A3 on a que pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

Pour tout réel  $x$ , l'expression  $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$  est positive ou nul donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$$

En multipliant par  $(-2) < 0$  on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \leq 0$$

Et donc en ajoutant  $\frac{9}{8}$  de chaque côté :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \underbrace{-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}_{f(x)} \leq \frac{9}{8}$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq \frac{9}{8}$$

Le nombre  $\frac{9}{8}$  est donc un majorant de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , or d'après la question B1, il est atteint pour  $x = \frac{5}{4}$ , c'est donc le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Correction de l'exercice 28 : Algorithmique

On considère les fonctions Python suivantes :

```

1 def g(x):
2     return (x-5)**2-(-1+x)**2
3
4 def h(x):
5     return 2*x-3
6
7 def f(x):
8     if x>=0:
9         return g(x)
10    else:
11        return h(x)

```

1. Que va renvoyer la fonction si on entre dans la console  $f(2)$  et  $f(-2)$  ?



### Corrigé

- Si on entre dans la console  $f(2)$ , puisque 2 est positif on obtient :

$$f(2) = g(2) = (2 - 5)^2 - (-1 + 2)^2 = (-3)^2 - 1^2 = \underline{8}$$

- Si on entre dans la console  $f(-2)$ , puisque  $(-2)$  est négatif on obtient :

$$f(-2) = h(-2) = 2 \times (-2) - 3 = \underline{-7}$$

2. Que proposer comme valeur(s) pour  $x$  afin que la fonction  $f$  renvoie 0 ?



### Corrigé

On va résoudre les deux équations et vérifier si les résultats sont cohérents.

- Cas  $x \geq 0$ .

Si on suppose que  $x$  est positif ou nul, alors l'expression de  $f(x)$  est  $g(x)$  donc :

Par factorisation on a :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-5)^2 - (-1+x)^2 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-5 - (-1+x))(x-5 + (-1+x)) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ -4(2x-6) = 0 \end{cases} \\
 &\iff x = 3 \in [0; +\infty[
 \end{aligned}$$

Donc cette solution est valable car positive.

- Cas  $x < 0$ .

Si on suppose que  $x$  est négatif strictement, alors l'expression de  $f$  est

$$f(x) = h(x) = 2x - 3$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x < 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{3}{2} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc cette solution n'est pas valide car on avait supposé que  $x$  était strictement négatif.

- Conclusion : pour que la fonction renvoie 0, on peut prendre comme valeur,  $x = 3$  uniquement.

## Correction de l'exercice 29 page 14 : systèmes

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. (S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$



## Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3y) \times (-2) = 4 \times (-2) \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -8 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

On garde la 1re équation et on ajoute le 1re à la 2e

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -8 \\ x + 0 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \times (-1) - 6y = -8 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y = -12 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}}$$

$$2. (S_2) : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$



## Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_2) : \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \times 6 = 2 \times 6 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$



on soustrait la 1re ligne à la 2e

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -4x + 0 = -11 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x = \frac{11}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \frac{11}{4} + 2y = 12 \\ x = \frac{11}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{33}{4} + 2y = 12 \\ x = \frac{11}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 12 - \frac{33}{4} = \frac{15}{4} \\ x = \frac{11}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = \frac{15}{8} \\ x = \frac{11}{4} \end{cases}} \end{aligned}$$

$$3. (S_3) : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ -3x - 2y = -12 \end{cases}$$



### Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Donc le système n'admet pas une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \times (-6) = 2 \times (-6) \\ -3x - 2y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -12 \\ -3x - 2y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow -3x - 2y = -12$$

Donc les deux équations sont en fait identiques, le système admet une infinité de solutions.

$$4. (S_4) : \begin{cases} \frac{x}{5} + y = 1 \\ x + 5y = -12 \end{cases}$$



### Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_4 = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Donc le système n'admet pas une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$(S_4) \iff \begin{cases} \left(\frac{x}{5} + y\right) \times (5) = 2 \times (5) \\ x + 5y = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 5y = 10 \\ x + 5y = -12 \end{cases}$$

Donc de façon évidente, ce système n'admet donc pas de solution.

5.  $(S_5) : \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$



### Corrigé

- Étape 1 : Calcul du déterminant.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \sqrt{2} \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : Résolution.

$$\begin{aligned} (S_4) &\iff \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ x = -1 - 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (-1 - 2y) + \sqrt{2}y = 1 \\ x = -1 - 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\sqrt{2} - 2)y = 2 \\ x = -1 - 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{2}{\sqrt{2} - 2} = -2 - \sqrt{2} \\ x = -1 - 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2 - \sqrt{2} \\ x = -1 - 2 \times (-2 - \sqrt{2}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2 - \sqrt{2} \\ x = -1 + 4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} y = -2 - \sqrt{2} \\ x = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}} \end{aligned}$$

6.  $(S_6) : \begin{cases} x^2 + 3y = 4 \\ x^2 + 6y = 7 \end{cases}$

7.  $(S_7) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$



### Réponses

$I_1(-1; 2)$ ,  $I_2\left(\frac{11}{4}; \frac{15}{8}\right)$ ,  $(S_3)$  a une infinité de solutions,  $(S_4)$  n'a pas de solution,  $I_5(2\sqrt{2} + 3; -\sqrt{2} - 2)$ ,  $(S_6)$  a deux solutions  
 $I_6(-1; 1)$  et  $I_6'(1; 1)$

## Correction de l'exercice 30 : systèmes

1. On considère l'inconnue réelle  $x$ , supposée appartenir à l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$ , et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

En posant  $u = \sin x$  et  $v = \cos x$ , on modélise ce système par un système linéaire en  $u$  et  $v$ .

**Résoudre le système (S), en commençant par calculer le déterminant du système linéaire.**



### Corrigé

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x.$$

Le système (S) devient alors le système linéaire suivant en  $(u, v)$  :

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{2} \\ u - v = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \cdot u + 1 \cdot v = \sqrt{2} \\ 1 \cdot u - 1 \cdot v = 0 \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2.$$

Comme  $\Delta = -2 \neq 0$ , le système est de Cramer et admet donc une unique solution  $(u, v)$ .

#### Résolution par combinaisons linéaires

Or on sait que  $u = v$  donc on a directement

$$u = v = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient donc l'unique solution du système linéaire :

$$\boxed{u = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par retour aux inconnues trigonométriques :

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{avec } x \in ]-\pi ; \pi].$$

Sur le cercle trigonométrique, on sait que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x \in \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\} \text{ dans } ]-\pi ; \pi],$$

et

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x \in \left\{ -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right\} \text{ dans } ]-\pi ; \pi].$$

Pour que le système (S) soit vérifié,  $x$  doit appartenir simultanément aux deux ensembles de solutions. On cherche donc l'intersection :

$$\left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\} \cap \left\{ -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Ainsi, dans l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$ , le système (S) admet une unique solution :

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

2. On considère l'inconnue réelle  $x$ , supposée appartenir à l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$ , et le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2 \cos x - 3 \sin x = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 4 \sin x + \cos x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

En posant  $u = \sin x$  et  $v = \cos x$ , ce système devient un système linéaire en  $u$  et  $v$ .

**Résoudre le système (S) en commençant par calculer le déterminant.**



### Corrigé

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x.$$

Le système (S) devient alors :

$$\begin{cases} -3u + 2v = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 4u + v = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -3 - 8 = -11.$$

Comme  $\Delta = -11 \neq 0$ , le système est de Cramer : il admet une unique solution.

#### Résolution.

On multiplie la deuxième équation par 2 puis on soustrait aux coefficients de la première pour éliminer  $v$  :

Équation (2)x2 :

$$8u + 2v = -4 + \sqrt{3}.$$

On soustrait avec (1) :

$$(-3u + 2v) - (8u + 2v) = -11u = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) - (-4 + \sqrt{3}).$$

Cela donne :

$$u = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$u = \sin x = -\frac{1}{2}, \quad v = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

#### Retour à l'angle $x$ .

On doit résoudre :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{avec } x \in ]-\pi ; \pi].$$

Sur le cercle trigonométrique :

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \implies \quad x = -\frac{\pi}{6}.$$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution :

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

3. Résoudre pour  $x$  et  $y$  réels de  $[0 ; 2\pi[$  le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x - 2 \cos y = 1 \end{cases}$$



### Corrigé

On cherche les couples réels  $(x, y)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x - 2 \cos y = 1 \end{cases}$$

#### 1. Mise en place d un système linéaire.

On pose :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos y.$$

Le système devient alors un système linéaire en  $u$  et  $v$  :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 4u - 2v = 1 \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 1 \times 4 = -2 - 4 = -6.$$

Comme  $\Delta = -6 \neq 0$ , le système est de Cramer et admet donc une unique solution  $(u, v)$ .

#### 2. Résolution du système linéaire.

On peut utiliser des combinaisons linéaires.

On multiplie la première équation par 2 :

$$2u + 2v = 2.$$

On ajoute à la deuxième équation :

$$(4u - 2v) + (2u + 2v) = 1 + 2 \quad \Rightarrow \quad 6u = 3.$$

Donc :

$$u = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

On remplace ensuite  $u$  dans la première équation :

$$u + v = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + v = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}.$$

On obtient donc :

$$u = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}.$$

Par définition de  $u$  et  $v$  :

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos y = \frac{1}{2}.$$

**3. Résolution trigonométrique dans  $[0 ; 2\pi[$ .**

On se place dans l'intervalle usuel  $[0 ; 2\pi[$ .

- Équation  $\sin x = \frac{1}{2}$  dans  $[0 ; 2\pi[$ .

On sait que  $\sin x = \frac{1}{2}$  pour les angles de référence  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ . Ainsi :

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

- Équation  $\cos y = \frac{1}{2}$  dans  $[0 ; 2\pi[$ .

On sait que  $\cos y = \frac{1}{2}$  pour les angles de référence  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$ . Ainsi :

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

**4. Ensemble des solutions du système.**

Les valeurs possibles de  $x$  et  $y$  se combinent librement : toute paire

$$(x, y) \in \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\} \times \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

est solution du système  $(S)$ .

On obtient donc les quatre solutions suivantes dans  $[0 ; 2\pi[$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) = \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right) \\ (x, y) = \left( \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right) \\ (x, y) = \left( \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right) \\ (x, y) = \left( \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right) \end{array} \right.$$

## Correction de l'exercice 31 : Problèmes et systèmes

1. Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On compte 120 têtes et 298 pattes. Combien y a-t-il de lapins et de poules dans la ferme ?



## Corrigé

- Étape 1 : On pose le problème en équations.  
Notons  $x$  le nombre de lapins et  $y$  le nombre de poules.  
On a alors les deux équations suivantes.  $4x + 2y = 298$  et  $x + y = 120$ .  
On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

- Étape 2 : Calcul du déterminant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 3 : Résolution.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ x + y = 120 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 298 \\ y = 120 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2(120 - x) = 298 \\ y = 120 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 29 \\ y = 91 \end{cases}$$

- Étape 4 : Conclusion.  
Il y a 29 lapins et 91 poules dans la ferme.

2. Dans le panier de Mme Martin, il y a 5 kg de pommes et 2 kg de carottes. Dans le panier de M. Bernard, il y a 3 kg de pommes et 7 kg de carottes. Mme Martin a payé 18,5 euros alors que M. Bernard a payé 28,5 euros. Quel est le prix d'un kg de pommes et d'un kg de carottes ?



## Corrigé

- Étape 1 : On pose le problème en équations.  
Notons  $x$  le prix d'un kilogramme de pommes et  $y$  le prix d'un kilogramme de carottes.  
On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 18,5 \\ 3x + 7y = 28,5 \end{cases}$$

- Étape 2 : Calcul du déterminant.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 6 = 29 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

• Étape 3 : Résolution.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + 2y = 18,5 \\ 3x + 7y = 28,5 \end{cases} &\iff \begin{cases} (5x + 2y) \times 3 = 18,5 \times 3 \\ (3x + 7y) \times 5 = 28,5 \times 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 15x + 6y = 55,5 \\ 15x + 35y = 142,5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 15x + 6y = 55,5 \\ 29y = 87 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 15x + 6y = 55,5 \\ y = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 15x + 6 \times 3 = 55,5 \\ y = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2,5 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

• Étape 4 : Conclusion.

Les pommes coûtent 2,5 euros le kilogramme et les carottes 3 euros le kilogramme.

3. Max a 10 pièces dans son porte-monnaie. Ce sont uniquement des pièces de 1 euros et 2 euros. Le montant contenu dans le porte monnaie est de 15 euros. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?



**Corrigé**

• Étape 1 : On pose le problème en équations.

Notons  $x$  le nombre de pièces de 1 euros et  $y$  le nombre de pièces de 2 euros.

On a alors :  $x + y = 10$  et  $x + 2y = 15$ .

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

• Étape 2 : Calcul du déterminant.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

• Étape 3 : Résolution.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 10 - y \\ x + 2y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 10 - y \\ (10 - y) + 2y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

• Étape 4 : Conclusion.

Max a donc 5 pièces de 1 euros et 5 pièces de 2 euros.