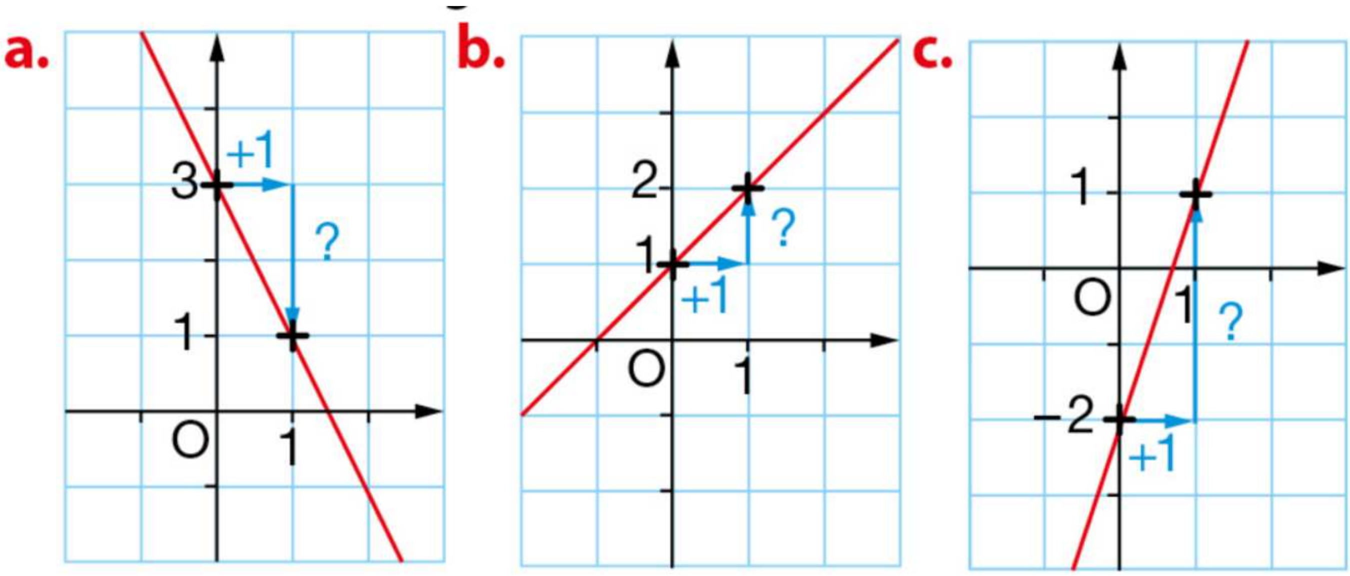
Math93.com

TD 1 - Seconde
Fonctions affines et Inéquations

Partie I. Fonctions affines

Exercice 1. Lectures graphiques (c)

Les droites ci-dessous sont les représentations graphiques des 3 fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$f(x) = \cdots\cdots\cdots$$

2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$

3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

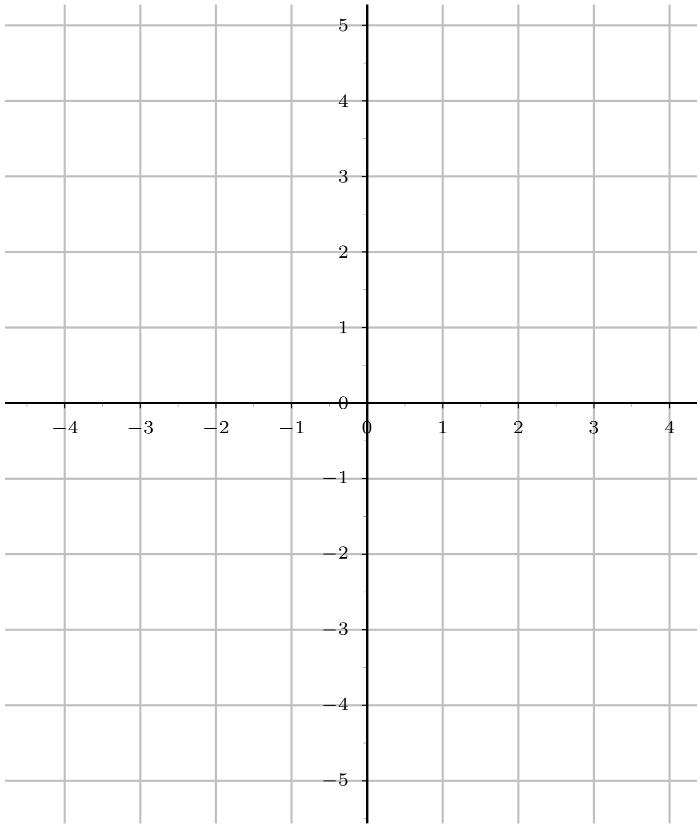
$$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 2. Variations et tableau de signe (c)

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	......	......
$f(x) = 2x + 1$	......	......

x	......	......
$g(x) = -3x + 2$	......	......



2. Étude de la fonctions f.

2. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de f. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	

2. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de f. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
Signe de $f(x) = 2x + 1$		0	

3. Étude de la fonctions g.

3. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de g. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de g	

3. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de g. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
Signe de $g(x) = -3x + 2$			0		

Exercice 3. Comme dans le cours (c)

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Exercice 4. Kwyk, c'est ma passion

Faire le TD kwyk sur les fonctions affines (c'est le TD 8).

Exercice 5. Défi (ex.95 du livre) **

Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. On appelle f^2 la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f^2(x) = f\Big(f(x)\Big)$$

On généralise cette notation pour $n \in \mathbb{N}$:
On appelle f^n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f^{n+1}(x) = f^n\Big(f(x)\Big) \text{ et } f^0(x) = x$$

1. Vérifier que pour $n = 1$,$n = 2$ et $n = 3$, les fonctions f^n sont affines.

2. Quelle conjecture peut-on faire sur le coefficient directeur et pour l'ordonnée à l'origine de f^n pour $n \in \mathbb{N}$?

3. Déterminer la seule fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

« Il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^n(x) = 2048x - 2047$ » .

Exercice 6. SAT

Question 1 (SAT - Practice test 3 - section 3 - Q8)

The line $y = kx + 4$, where k is a constant, is graphed in the xy-plane. If the line contains the point (c, d), where $c \neq 0$ and $d \neq 0$, what is the slope of the line in terms of c and d ?

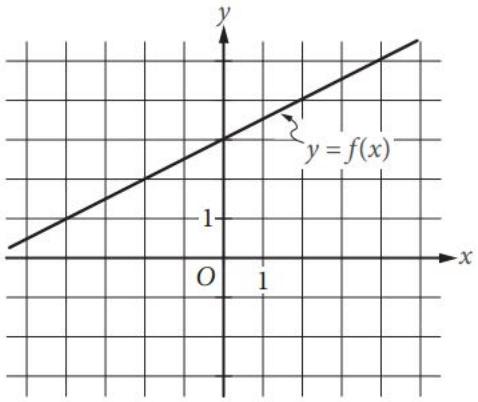
a. $\dfrac{d-4}{c}$ **b.** $\dfrac{c-4}{d}$ **c.** $\dfrac{4-d}{c}$ **d.** $\dfrac{4-c}{d}$

Question 2 (SAT - Practice test 3 - section 4 - Q26)

In the xy-plane, the line determined by the points $(2, k)$ and $(k, 32)$ passes through the origin. Which of the following could be the value of k ?

a. 0 **b.** 4 **c.** 8 **d.** 16

Question 3 (SAT - Practice test 3 - section 4 - Q28)



The graph of the linear function f is shown in the xy-plane above. The slope of the graph of the linear function g is 4 times the slope of the graph of f.
If the graph of g passes through the point $(0\ ;\ -4)$, what is the value of $g(9)$?

a. 5 **b.** 9 **c.** 14 **d.** 18

Partie II. Inéquations

Exemple 1

Exemple : Étudions le signe de l'expression : $f(x) = \dfrac{2(2x+1)(1-3x)(x^2+1)}{(x+5)(-4x)}$

1. **Valeurs interdites** : Les valeurs interdites sont donc -5 et 0 car :

   - $x+5 \neq 0 \iff x \neq -5$;
   - $-4x \neq 0 \iff x \neq 0$.

2. **On exhibe des facteurs positifs strictement** :
   Puisque pour tous réels x on a $x^2 \geqslant 0$, de ce fait $(x^2+1) \geqslant 1 > 0$ donc $f(x)$ est du signe des autres facteurs.

3. **Étude du signe de chaque facteur** :
   On propose ici 4 petites rédactions différentes, choisissez celle que vous préférez.

   - **Étude du signe de $2x+1$** :

   $$\begin{cases} 2x+1=0 \iff x=-\dfrac{1}{2} \\ 2x+1<0 \iff x<-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   - **Étude du signe de $1-3x$** :

   $$1-3x=0 \iff x=\frac{1}{3}$$

   Et la fonction affine $x \longmapsto 1-3x$ est décroissante car de coefficient directeur $m=-3<0$ et elle s'annule en $x=\dfrac{1}{3}$ donc elle est positive avant et négative après $x=\dfrac{1}{3}$.

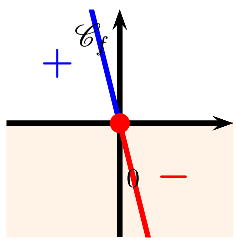
   - **Étude du signe de $x+5$** :

   $$x+5=0 \iff x=-5$$

   Puisque le coefficient de x est $a=1>0$, l'expression est négative avant et positive après $x=5$.

   - **Étude du signe de $-4x$** :

   $-4x=0 \iff x=0$ et on a la fonction affine associée de courb



4. **Tableau de signes (on peut omettre la première ligne car (x^2+1) est strictement positif)**

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de (x^2+1)		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
signe de $2x+1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
signe de $1-3x$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
signe de $-4x$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\dfrac{2(2x+1)(1-3x)(x^2+1)}{(x+5)(-4x)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{f(x)>0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-5\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right[\cup \left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[}$$

$$\boxed{f(x)=0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right\}} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x)<0 \iff x \in \left]-5\,;\,-0,5\right[\cup \left]0\,;\,\frac{1}{3}\right[}$$

Méthode 1 (Résolution d'un inéquation)

Méthode : Pour résoudre une inéquation :

1. on détermine les valeurs interdites dans le cas d'un quotient ;
2. on exprime tout sous la forme d'un produit ou d'un quotient (mise au même dénominateur, factorisation ...) ;
   On doit alors avoir obtenu une expression du type
   $$A(x) \times B(x) \times \frac{C(x)}{D(x)} \leqslant 0 \text{ ou } \geqslant 0 \text{ ou } < 0 \text{ ou } > 0$$
3. on tente d'exhiber des facteurs strictement positifs, par exemple $(x^2 + 1)$;
   Attention : si un facteur est positif ou nul comme x^2, il devra apparaitre dans le tableau de signe.
4. on étudie le signe de chacun des autres facteurs ;
5. on résume l'étude dans un tableau de signe ;
6. et on conclut en donnant l'ensemble des solutions (bien vérifier si on cherche des solutions réelles ou entières).

Exercice 7. Avec une interprétation graphique

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x^2 \leqslant x$
2. Construire les courbes représentatives des fonctions $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = f(x) = x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = g(x) = x \end{array} \right.$
   et retrouver graphiquement le résultat de la question 1°).
3. Déterminer l'ensemble des nombres réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
4. **Vrai ou Faux ?** : Il n'y a pas d'entier naturel strictement supérieur à leur carré.

Réponses
$S_1 = [0 ; 1]$ *et* $S_2 =]0 ; 1[$

Exercice 8. Suivez le modèle : partie 1 (c)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $\dfrac{4x-3}{4-5x} \leqslant 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2) : $(x-1)(1-2x) \leqslant 0$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_3) : $x - \dfrac{4x+1}{3} < 2$
4. Résoudre sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ l'inéquation (I_4) : $x^2 < -4x$.
   On pourra faire l'étude de signe de l'expression sur $\mathbb{R}$ avant de réduire les solutions à l'ensemble des relatifs.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_5) : $\dfrac{x+1}{x-1} \leqslant 0$

Réponses
$S_{I_1} =]-\infty ; 0,75] \cup]0,8 ; +\infty[$; $S_{I_2} =]-\infty ; 0,5] \cup [1 ; +\infty[$; $S_{I_3} =]-7 ; +\infty[$; $S_{I_4} = \{-3 ; -2 ; -1\}$

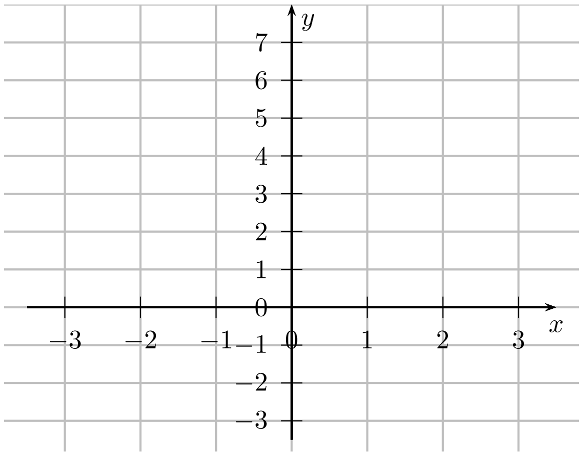
Exercice 9. Une histoire de carré

1. Déterminer l'ensemble des nombres réels qui ont un carré strictement supérieur à leur double.
2. En déduire l'ensemble des nombres entiers naturels qui ont un carré strictement supérieur à leur double.

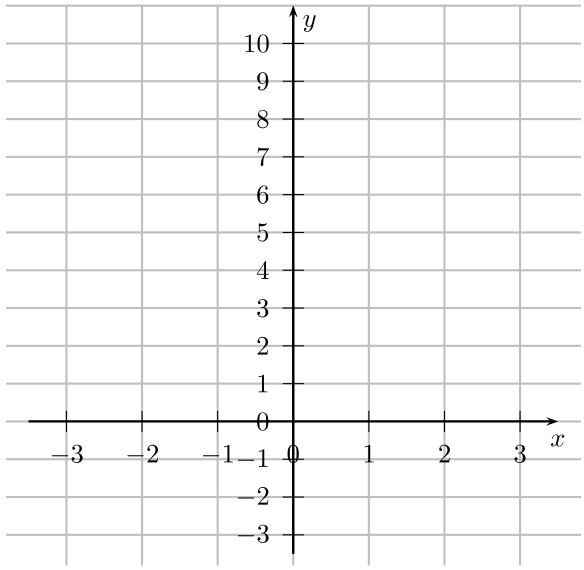
Réponses
$S_1 =]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ *et* $S_2 = \{3 ; 4 ; 5 ; ...\}$

Exercice 10. Représentations graphiques

1. Sur le graphique suivant, construire les courbes représentatives de la fonction carrée et de $g : x \longmapsto g(x) = 2x$ puis retrouver le résultat de l'exercice précédent.



2. Sur le graphique suivant, construire les courbes représentatives de la fonction carrée et de $h : x \longmapsto h(x) = 3x$ puis résoudre graphiquement l'inégalité $(I) \quad : \quad x^2 < 3x$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.



Exercice 11. Représentations graphiques (c)

1. **(c)** Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $f : x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$.

1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(I_5) \quad : \quad f(x) \geqslant 0$$

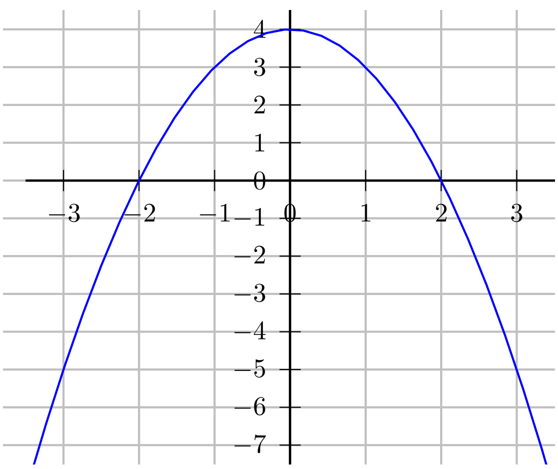
1. b. Construire sans justification $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction affine : $g : x \longmapsto g(x) = x - 2$.

1. c. Résoudre graphiquement l'inéquation :

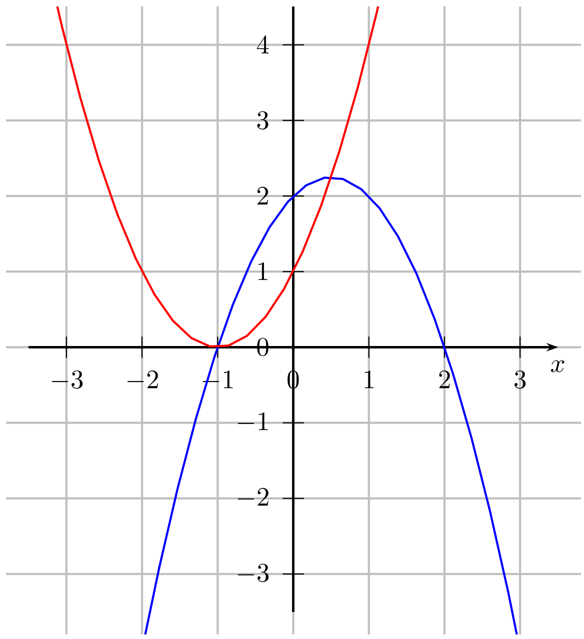
$$(I_6) \quad : \quad f(x) \geqslant g(x)$$

1. d. Résoudre par le calcul l'inéquation :

$$(I_6) \quad : \quad f(x) \geqslant g(x)$$



2. Sur le graphique suivant, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = (x+1)(-x+2)$ et celle de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (x+1)^2$. Identifiez les courbes associées aux fonctions puis résoudre graphiquement l'inégalité $(I_2) \quad : \quad f(x) < g(x)$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.



3. Construire sur votre copie le graphe de la fonction inverse ainsi que celui de la fonction affine $g : x \longmapsto g(x) = 3x$.
Résoudre graphiquement l'inégalité $(I_3) \quad : \quad \dfrac{1}{x} < 3x$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.

Exercice 12. Suivez le modèle : partie 2 (c)

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = (6x-1)(4x+3)(x+2)^2$;
2. $B(x) = -4(-3x+1)(-x-7)(x^2+1)$;
3. $C(x) = \dfrac{2x}{(5-x)(3x^2+2)}$;
4. $D(x) = -4 \times \dfrac{3-5x}{2-x}$;
5. $E(x) = -5x^2(x-4)$;
6. $F(x) = \dfrac{-2x^2(-3x+5)}{x+2}$.
7. $G(x) = x^2+2x+1$

Réponses

- $A(x) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-0,75\right] \cup \left[\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$; $A(x) < 0 \iff x \in \left]-0,75\,;\,\frac{1}{6}\right[$; $A(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{-3}{4}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-2\right\}$
- $B(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[-7\,;\,\frac{1}{3}\right]$; $B(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-7\right[\cup \left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$
- $C(x) \geqslant 0 \iff x \in [0\,;\,5[$; $C(x) < 0 \iff x \in]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$
- $D(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[\frac{3}{5}\,;\,2\right[$; $D(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$
- $E(x) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;\,4]$; $E(x) < 0 \iff x \in]4\,;\,+\infty[$
- $F(x) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-2[\cup\{0\}\cup\left[\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$; $F(x) < 0 \iff x \in]-2\,;\,0[\cup\left]0\,;\,\dfrac{5}{3}\right[$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) \geqslant 0$; $G(x) = 0 \iff x = -1$.

Exercice 13. Factoriser puis résoudre (c)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(I_8)\ :\ (x+3)^2 > 9x^2$
2. $(I_9)\ :\ \dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{4}{4-x^2}$
3. $(I_{10})\ :\ \dfrac{1}{x^2} < -1$

Exercice 14. Quelques fourberies

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_1)\ :\ (x-1)^2 \leqslant 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$(I_2)\ :\ \frac{x^2-4x+4}{x^2\,(x^2-6x+9)} \leqslant 0$$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_3)\ :\ 4x(x-2) > (2x-1)^2$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_4)\ :\ (6-x)(5-x) \leqslant 30$
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_5)\ :\ 4 \leqslant \dfrac{7-2x}{3x} \leqslant 11$
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_6)\ :\ 4x^3 < x$
7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_7)\ :\ x^2 \leqslant -x^4$
8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_8)\ :\ x^2 > x^4$
9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_9)\ :\ (x+1)^2 > -5$

Réponses
$S_1 = \{1\}$; $S_2 = \{2\}$; $S_3 = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{4}\right[$; $S_4 = [0\,;\,11]$; $S_5 = \left[\frac{1}{5}\,;\,\frac{1}{2}\right]$; $S_6 = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$; $S_7 = \{0\}$; $S_9 =]-1\,;\,1[$; $S_9 = \mathbb{R}$

Exercice 15. Algorithmes et série harmonique

On appelle série harmonique la somme (H_n), pour n entier supérieur à 1 et définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Calculer H_1, H_2, H_3, H_4.
2. A l'aide de votre calculatrice, trouver un entier n_2 tel que $H_{n_2} > 2$ puis de même un entier n_3 tel que $H_{n_3} > 3$.
3. Écrivez maintenant un algorithme qui permettant de calculer H_n en introduisant une fonction de paramètre n.
4. Modifier cet algorithme pour qu'il détermine (s'il existe), un entier n tel que $H_n > 10$.
5. Étrange non ? Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie III. Complément : PPF **

Exercice 16. Défi (ex.95 du livre) **

Soit f une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. On appelle f^2 la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f^2(x) = f\Big(f(x)\Big)$$

On généralise cette notation pour $n \in \mathbb{N}$:
On appelle f^n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f^{n+1}(x) = f^n\Big(f(x)\Big) \text{ et } f^0(x) = x$$

1. Vérifier que pour $n = 1$,$n = 2$ et $n = 3$, les fonctions f^n sont affines.

2. Quelle conjecture peut-on faire sur le coefficient directeur et pour l'ordonnée à l'origine de f^n pour $n \in \mathbb{N}$?

3. Déterminer la seule fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

« Il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^n(x) = 2048x - 2047$ » .

Exercice 17. Composition de fonctions **

1. Soit f et g deux fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 1 \text{ et } g(x) = 3 - 4x$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction composée h définie par $h = fog$ soit pour tout réel x par :

$$h(x) = f\Big(g(x)\Big)$$

1. b. Déterminer l'expression de la fonction composée i définie par $i = gof$ soit pour tout réel x par :

$$i(x) = g\Big(f(x)\Big)$$

2. Déterminer toutes les fonctions affines qui sont <u>involutives</u>, c'est à dire telles que pour tout réel x :

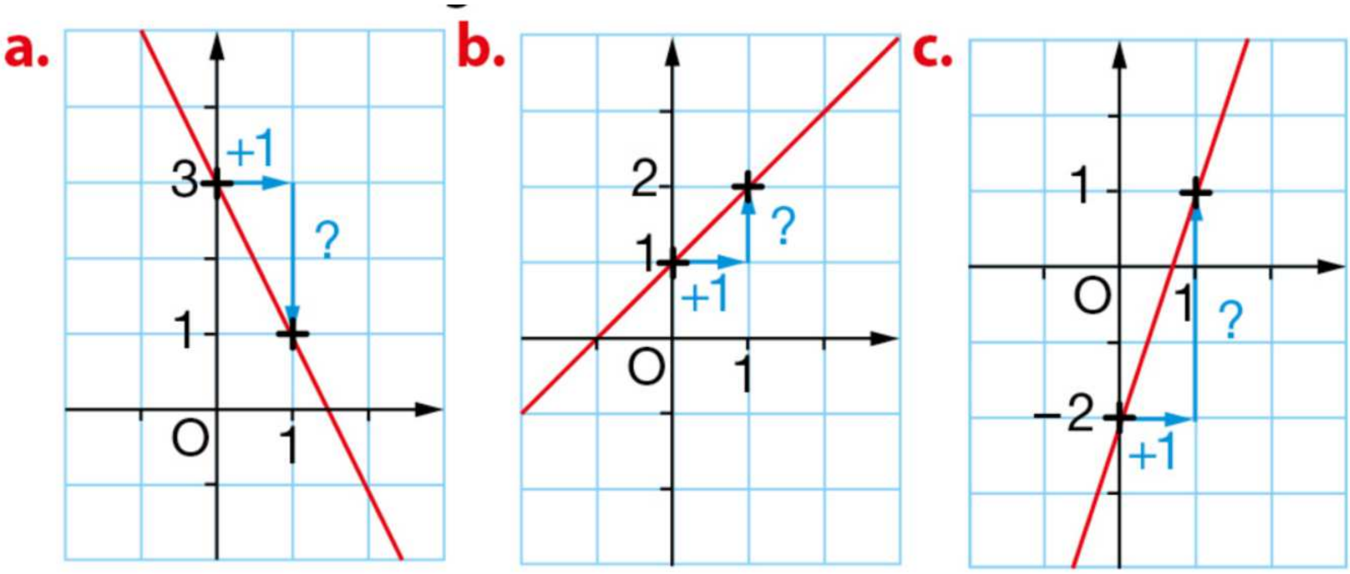
$$f\Big(f(x)\Big) = x \quad \text{ou} \quad fof(x) = x$$

↫ **Fin du TD** ↬

Partie IV. Corrections

Correction de l'exercice 1 page 1

fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
   Par lecture graphique :
   $$p = 3 \quad \text{et} \quad m = -2$$
   Donc
   $$f(x) = -2x + 3$$

2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
   Par lecture graphique :
   $$p = 1 \quad \text{et} \quad m = 1$$
   Donc
   $$g(x) = x + 1$$

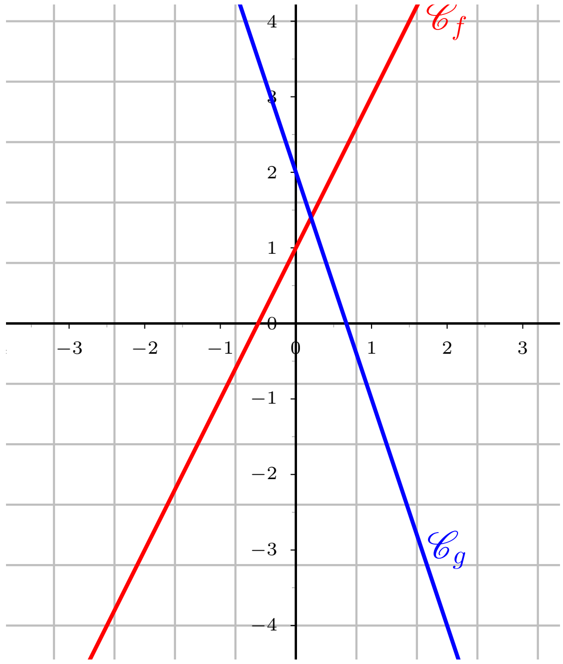
3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
   Par lecture graphique :
   $$p = -2 \quad \text{et} \quad m = 3$$
   Donc
   $$h(x) = 3x - 2$$

Correction de l'exercice 2 page 2

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	0	2
$f(x) = 2x + 1$	1	5

x	0	2
$g(x) = -3x + 2$	2	-4



2. Étude de la fonctions f.

2. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de f.

Corrigé

La fonction affine f est de coefficient directeur $m = 2 > 0$ donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$

2. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de f.

Corrigé

La fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = -\dfrac{1}{2}$ donc

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x) = 2x + 1$		$-$	0	$+$	

En effet

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

3. Étude de la fonctions g.

3. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de g.

Corrigé

La fonction affine g est de coefficient directeur $m = -3 < 0$ donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g	$\searrow$	

3. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de g.

Corrigé

La fonction affine g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{2}{3}$ donc

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x) = -3x + 2$		$+$	0	$-$	

En effet

x	$-\infty$	$\dfrac{2}{3}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\searrow$

Correction de l'exercice 3 page 3

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

Correction

- La fonction affine f est de la forme $f(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(4) = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_f \\ B(4\ ;\ 9) \in \mathscr{C}_f \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(1\ ;\ 5) \\ B(4\ ;\ 9) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{4-1} = \frac{4}{3}$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{4}{3}x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$A(1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_f \Longrightarrow f(1) = 5$$

Et

$$\begin{aligned} f(1) = 5 &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} \times 1 + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow p = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

- Conclusion.

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $f(1) = 5$.

$$f(1) = \frac{4}{3} \times 1 + \frac{11}{3} = \frac{15}{3} = 5 \checkmark$$

  - On doit avoir $f(4) = 9$.

$$f(4) = \frac{4}{3} \times 4 + \frac{11}{3} = \frac{16+11}{3} = \frac{27}{3} = 9 \checkmark$$

2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Correction

- La fonction affine g est de la forme $g(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \\ B(2\ ;\ -4) \in \mathscr{C}_g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ g(2) = -4 \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \\ B(2\ ;\ -4) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-2}{2-0} = \frac{-6}{2} = -3$$

On a donc :

$$g(x) = -3x + p$$

- On détermine p.
  Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p, c'est simple ici car l'image de 0 donne directement p

$$A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \Longrightarrow g(0) = 2 = p$$

- Conclusion.
  Donc

$$\boxed{g(x) = -3x + 2}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $g(0) = 2$.

$$g(0) = -3 \times 0 + 2 = 2 \ \checkmark$$

  - On doit avoir $g(2) = -4$.

$$g(2) = -3 \times 2 + 2 = -6 + 2 = -4 \ \checkmark$$

Correction de l'exercice 8 : suivez le modèle (partie 1)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $\dfrac{4x-3}{4-5x} \leqslant 0$

Corrigé

- Valeur interdite : l'expression est définie si et seulement si :

$$4-5x \neq 0 \iff x \neq \frac{4}{5}$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $(4x-3)$:

$$(4x-3)=0 \iff x=\frac{3}{4}$$

    La fonction affine $x \longmapsto 4x+3$ est croissante (car de coefficient $m=4>0$) et s'annule en $x=\dfrac{3}{4}$, donc négative avant puis positive après.
  - Facteur $(4-5x)$:

$$(4-5x)=0 \iff x=\frac{4}{5}$$

    La fonction affine $x \longmapsto 4-5x$ est décroissante (car de coefficient $m=-5<0$) et s'annule en $x=\dfrac{4}{5}$, donc positive avant puis négative après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
signe de $(4x-3)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
signe de $(4-5x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\dfrac{4x-3}{4-5x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

- Inéquation :

$$\boxed{\frac{4x-3}{4-5x} \leqslant 0 \iff \left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right] \cup \left]\frac{4}{5}\,;\,+\infty\right[}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2) : $(x-1)(1-2x) \leqslant 0$

Corrigé

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $(x-1)$:

$$(x-1)=0 \iff x=1$$

    La fonction affine $x \longmapsto (x-1)$ est croissante (car de coefficient $m=1>0$) et s'annule en $x=1$, donc négative avant puis positive après.
  - Facteur $(1-2x)$:

$$(1-2x)=0 \iff x=\frac{1}{2}$$

    La fonction affine $x \longmapsto (1-2x)$ est décroissante (car de coefficient $m=-2<0$) et s'annule en $x=\frac{1}{2}$, donc positive avant puis négative après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(1-2x)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\frac{4x-3}{4-5x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Inéquation :

$$\boxed{(x-1)(1-2x) \leqslant 0 \iff]-\infty\,;\,0,5] \cup [1\,;\,+\infty[}$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_3) : $x - \dfrac{4x+1}{3} < 2$

Corrigé

- Factorisation de l'expression :
  En multipliant chaque membre par 3 on obtient aisément :

$$\begin{aligned} x - \frac{4x+1}{3} < 2 &\iff 3x - (4x+1) < 6 \\ &\iff -x - 1 < 6 \\ &\iff -x < 7 \\ &\iff \underline{x > -7} \end{aligned}$$

- Inéquation :

$$\boxed{x - \frac{4x+1}{3} < 2 \iff]-7\,;\,+\infty[}$$

4. Résoudre sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ l'inéquation (I_4) : $x^2 < -4x$.
On pourra faire l'étude de signe de l'expression sur $\mathbb{R}$ avant de réduire les solutions à l'ensemble des relatifs.

Corrigé

- Factorisation de l'expression :

$$\begin{aligned} x^2 < -4x &\iff x^2 + 4x < 0 \\ &\iff x(x+4) < 0 \end{aligned}$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur x : Étude triviale.
  - Facteur $(x+4)$:

$$(x+4) = 0 \iff x = -4$$

  La fonction affine $x \longmapsto x + 4$ est croissante (car de coefficient $m = 1 > 0$) et s'annule en $x = -4$, donc négative avant puis positive après.

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+4)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Inéquation dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x^2 < -4x \iff x(x+4) < 0 \iff]-4\,;\,0[}$$

- Retour sur le problème :
  On cherchait à résoudre sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ l'inéquation (I_4) : $x^2 < -4x$.
  D'après l'étude précédente on a donc :

$$\boxed{S_{I_4} = \{-3\,;\,-2\,;\,-1\}}$$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_5) : $\dfrac{x+1}{x-1} \leqslant 0$

Corrigé

- Valeur interdite : l'expression est définie si et seulement si :

$$x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $(x+1)$:

$$(x+1)=0 \iff x=-1$$

    La fonction affine $x \longmapsto x+1$ est croissante (car de coefficient $m=1>0$) et s'annule en $x=-1$, donc négative avant puis positive après.
  - Facteur $(x-1)$:

$$(x-1)=0 \iff x=1$$

    La fonction affine $x \longmapsto (x-1)$ est croissante (car de coefficient $m=1>0$) et s'annule en $x=1$, donc négative avant puis positive après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $(x+1)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
signe de $(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

- Inéquation :

$$\boxed{\dfrac{x+1}{x-1} \leqslant 0 \iff [-1\,;\,1[}$$

Correction de l'exercice 11

1. Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $f : x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$.

1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation :

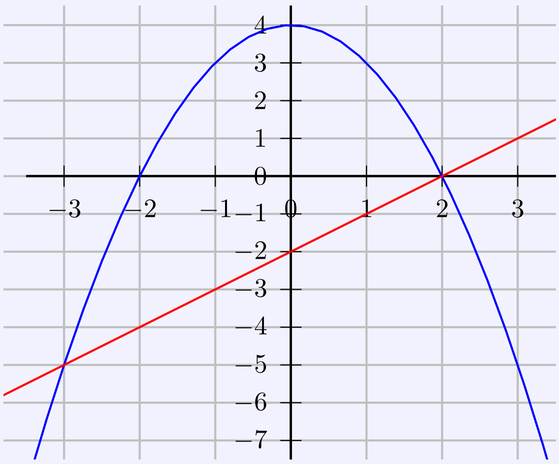
$$(I_5) \quad : \quad f(x) \geqslant 0$$

Corrigé

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de l'axe des abscisses, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $\underline{[-2\,;\,2]}$.

1. b. Construire sans justification $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction affine : $g : x \longmapsto g(x) = x - 2$.

Corrigé



1. c. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(I_6) \quad : \quad f(x) \geqslant g(x)$$

Corrigé

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de ceux de $\mathscr{C}_f$, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $\underline{[-3\,;\,2]}$.

1. d. Résoudre par le calcul l'inéquation :

$$(I_6) \quad : \quad f(x) \geqslant g(x)$$

Corrigé

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant g(x) &\iff (x-2)(-x-2) \geqslant x-2 \\
&\iff (x-2)(-x-2) - (x-2) \geqslant 0 \\
&\iff (x-2)\Big[(-x-2) - 1\Big] \geqslant 0 \\
&\iff (x-2)(-x-3) \geqslant 0
\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(x-2)$:**

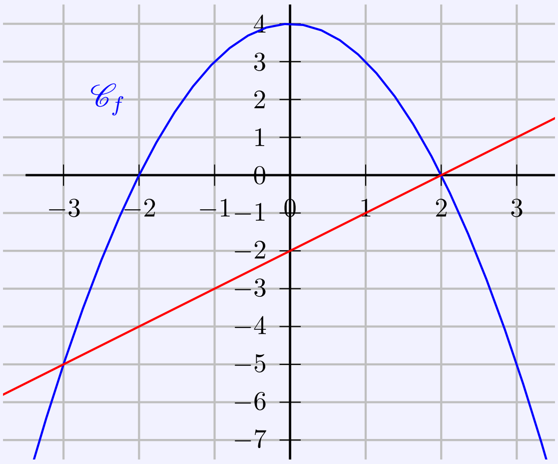
$$\begin{cases} x-2=0 \iff x=2 \\ x-2>0 \iff x>2 \end{cases}$$

- **Étude du signe de $-x-3$:**

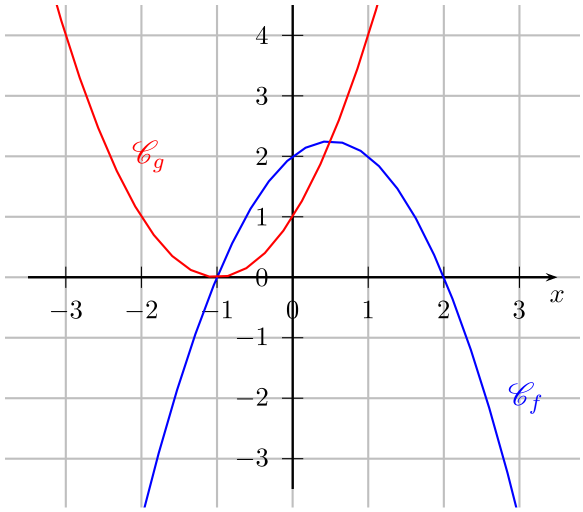
$$\begin{cases} -x-3=0 \iff x=-3 \\ -x-3>0 \iff x<-3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-2)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x) \geqslant g(x) \iff x \in [-3\,;\,2]}$$



2. Sur le graphique suivant, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = (x+1)(-x+2)$ et celle de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (x+1)^2$. Identifiez les courbes associées aux fonctions puis résoudre graphiquement l'inégalité $(I_2) \quad : \quad f(x) < g(x)$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.



Corrigé

- Puisque $f(0) = (0+1)(-0+2) = 2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\ ;\ 2)$. La courbe rouge est celle de g et la bleue celle de f.
- Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessous de ceux de $\mathscr{C}_f$, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $\left]-1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.
- Résolution algébrique.

$$\begin{aligned}
f(x) < g(x) &\iff (x+1)(-x+2) < (x+1)^2 \\
&\iff (x+1)(-x+2) - (x+1)^2 < 0 \\
&\iff (x+1)\Big[(-x+2) - (x+1)\Big] < 0 \\
&\iff (x+1)\Big[-x+2-x-1\Big] < 0 \\
&\iff (x+1)(-2x+1) < 0
\end{aligned}$$

– **Étude du signe de $(x+1)$:**

$$x+1=0 \iff x=-1$$

Et la fonction affine $x \longmapsto x+1$ est croissante donc négative avant $x=-1$ puis positive.

– **Étude du signe de $-2x+1$:**

$$-2x+1=0 \iff x=\frac{1}{2}$$

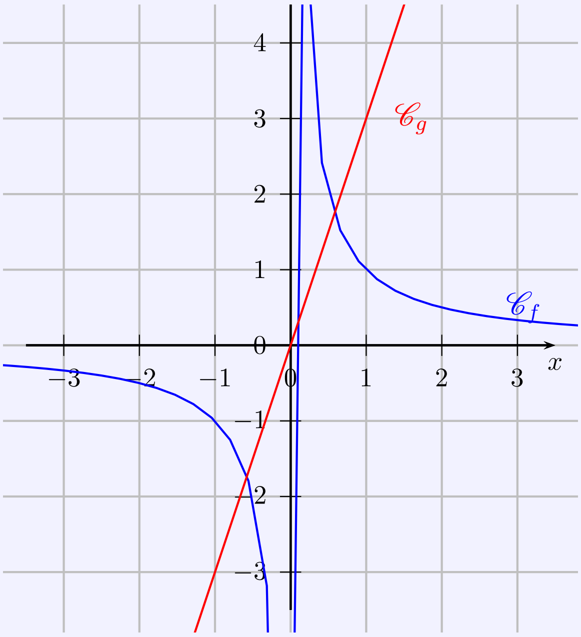
Et la fonction affine $x \longmapsto -2x+1$ est décroissante donc positive avant $x=\dfrac{1}{2}$ puis négative.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(x+1)(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x) < g(x) \iff x \in \left]-1\ ;\ \frac{1}{2}\right[}$$

3. Construire sur votre copie le graphe de la fonction inverse ainsi que celui de la fonction affine $g : x \longmapsto g(x) = 3x$.
Résoudre graphiquement l'inégalité (I_3) : $\dfrac{1}{x} < 3x$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.

Corrigé



- Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) = \dfrac{1}{x} < g(x) = 3x$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessous de ceux de $\mathscr{C}_f$, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $]-0,6\,;\,0[\,\cup\,]0,6\,;\,+\infty[$.
- Valeur interdite : la valeur interdite est $x = 0$.
- Résolution algébrique.
  Pour x non nul on a :

$$\begin{aligned}
f(x) < g(x) &\iff \frac{1}{x} < 3x \\
&\iff \frac{1}{x} - 3x < 0 \\
&\iff \frac{1-3x^2}{x} < 0 \\
&\iff \frac{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}{x} < 0 \\
&\iff \frac{\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)}{x} < 0
\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $\left(1-\sqrt{3}x\right)$:**

$$\left(1-\sqrt{3}x\right) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Et la fonction affine $x \longmapsto \left(1-\sqrt{3}x\right)$ est décroissante donc positive avant puis négative.

- **Étude du signe de $\left(1+\sqrt{3}x\right)$:**

$$\left(1+\sqrt{3}x\right) = 0 \iff x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Et la fonction affine $x \longmapsto \left(1+\sqrt{3}x\right)$ est croissante donc négative avant puis positive.

- Étude du signe de x : trivial.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $\left(1-\sqrt{3}x\right)$		$+$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
signe de $\left(1+\sqrt{3}x\right)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x) < g(x) \iff x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,0\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,+\infty\right[}$$

Correction de l'exercice 12 : suivez le modèle (partie 2)

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = (6x-1)(4x+3)(x+2)^2$;

Corrigé

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $(x+2)^2$: Attention, ce n'est pas un facteur "affine"

$$(x+2)^2 = 0 \iff (x+2) = 0 \iff x = -2$$

Par ailleurs pour tout réel x on a $(x+2)^2 \geqslant 0$ donc ce facteur est positif partout et nul pour $x = -2$.

  - Facteur $(6x-1)$:

$$(6x-1) = 0 \iff x = \frac{1}{6}$$

La fonction affine $x \longmapsto (6x-1)$ est croissante (car de coefficient $m = 6 > 0$) et s'annule en $x = \frac{1}{6}$, donc négative avant puis positive après.

  - Facteur $(4x+3)$:

$$(4x+3) = 0 \iff x = -\frac{3}{4}$$

La fonction affine $x \longmapsto (4x+3)$ est croissante (car de coefficient $m = 4 > 0$) et s'annule en $x = -\frac{3}{4}$, donc négative avant puis positive après.

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
signe de $(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $(6x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(4x+3)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$A(x) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-0,75\right] \cup \left[\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$; $A(x) < 0 \iff x \in \left]-0,75\,;\,\frac{1}{6}\right[$; $A(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{-3}{4}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-2\right\}$

2. $B(x) = -4(-3x+1)(-x-7)(x^2+1)$;

Corrigé

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteurs -4 et (x^2+1) : Attention, ce n'est pas un facteur "affine".
    Pour tout réel x on a $x^2 \geqslant 0$ et donc $(x^2+1) \geqslant 1 > 0$.
    De ce fait $-4(x^2+1) < 0$, le produit de ces deux facteurs est strictement négatif.
  - Facteur $(-3x+1)$:
    $$(-3x+1) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$$
    La fonction affine $x \longmapsto (-3x+1)$ est décroissante (car de coefficient $m = -3 < 0$) et s'annule en $x = \frac{1}{3}$, donc positive avant puis négative après.
  - Facteur $(-x-7)$:
    $$(-x-7) = 0 \iff x = -7$$
    La fonction affine $x \longmapsto (-x-7)$ est décroissante (car de coefficient $m = -1 < 0$) et s'annule en $x = -7$, donc positive avant puis négative après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $-4(x^2+1)$		$-$		$-$		$-$	
signe de $(-3x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(-x-7)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$B(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[-7 \,;\, \frac{1}{3}\right]$; $B(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty \,;\, -7\right[\cup \left]\frac{1}{3} \,;\, +\infty\right[$

3. $C(x) = \dfrac{2x}{(5-x)(3x^2+2)}$;

Corrigé

- Valeur interdite : l'expression est définie si et seulement si :

$$(5-x)(3x^2+2) \neq 0$$

Or pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ et donc

$$(3x^2+2) \geqslant 2 > 0$$

De ce fait l'expression est définie si et seulement si :

$$(5-x) \neq 0 \iff x \neq 5$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $(3x^2+2)$: Attention, ce n'est pas un facteur "affine".
    Or a vu que ce facteur était strictement positif (on peut ne pas le faire figurer dans le tableau) donc l'expression est du signe des autres facteurs :

    $$(3x^2+2) \geqslant 2 > 0$$

  - Facteur $(5-x)$:

    $$(5-x) = 0 \iff x = 5$$

    La fonction affine $x \longmapsto (5-x)$ est décroissante (car de coefficient $m = -1 < 0$) et s'annule en $x = 5$, donc positive avant puis négative après.
  - Facteur $(2x)$:

    $$2x = 0 \iff x = 0$$

    La fonction linéaire $x \longmapsto 2x$ est croissante (car de coefficient $m = 2 > 0$) et s'annule en $x = 0$, donc négative avant puis positive après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
signe de $(3x^2+2)$		$+$		$+$		$+$	
signe de $(5-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(2x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $D(x) = -4 \times \dfrac{3-5x}{2-x}$;

Corrigé

- Valeur interdite : l'expression est définie si et seulement si :

$$(2-x) \neq 0 \iff x \neq 2$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur (-4) : Trivial ! -4 est négatif ...
  - Facteur $(3-5x)$:

$$(3-5x) = 0 \iff x = \frac{3}{5}$$

    La fonction affine $x \longmapsto (3-5x)$ est décroissante (car de coefficient $m = -5 < 0$) et s'annule en $x = \dfrac{3}{5}$, donc positive avant puis négative après.
  - Facteur $(2-x)$:

$$2 - x = 0 \iff x = 2$$

    La fonction affine $x \longmapsto (2-x)$ est décroissante (car de coefficient $m = -1 < 0$) et s'annule en $x = 2$, donc positive avant puis négative après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		2		$+\infty$
signe de -4		$-$		$-$	‖	$-$	
signe de $(3-5x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
signe de $(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $D(x) = -4 \times \dfrac{3-5x}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$D(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[\frac{3}{5}\,;\,2\right[\;;\; D(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup \left]2\,;\,+\infty\right[$$

5. $E(x) = -5x^2(x-4)$;

Corrigé

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $-5x^2$: Attention, ce n'est pas un facteur "affine"
    Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ et donc $-5x^2 \leqslant 0$ et s'annule pour $x = 0$.
  - Facteur $(x-4)$:

    $$(x-4) = 0 \iff x = 4$$

    La fonction affine $x \longmapsto (x-4)$ est croissante (car de coefficient $m = 1 > 0$) et s'annule en $x = 4$, donc négative avant puis positive après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de $-5x^2$		$-$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-4)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $E(x) = -5x^2(x-4)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$$E(x) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;\,4]\ ;\ E(x) < 0 \iff x \in]4\,;\,+\infty[$$

6. $F(x) = \dfrac{-2x^2(-3x+5)}{x+2}$.

Corrigé

- Valeur interdite : l'expression est définie si et seulement si :

$$(x+2) \neq 0 \iff x \neq -2$$

- Étude du signe des facteurs :
  - Facteur $-2x^2$: Attention, ce n'est pas un facteur affine.
    Pour tout réel x on a $x^2 \geqslant 0$ donc $-2x^2 \leqslant 0$ et ce facteur s'annule en $x=0$ puisque !

$$-2x^2 = 0 \iff x = 0$$

  - Facteur $(-3x+5)$:

$$(-3x+5) = 0 \iff x = \frac{5}{3}$$

    La fonction affine $x \longmapsto (-3x+5)$ est décroissante (car de coefficient $m=-3<0$) et s'annule en $x = \frac{5}{3}$, donc positive avant puis négative après.
  - Facteur $(x+2)$:

$$x+2 = 0 \iff x = -2$$

    La fonction affine $x \longmapsto (x+2)$ est croissante (car de coefficient $m=1>0$) et s'annule en $x=-2$, donc négative avant puis positive après.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de $-2x^2$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$		$-$	
signe de $(-3x+5)$		$+$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $F(x) = \dfrac{-2x^2(-3x+5)}{x+2}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	0	$+$	

$$F(x) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-2[\cup \{0\} \cup \left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[\ ;\ F(x) < 0 \iff x \in]-2\,;\,0[\cup \left]0\,;\,\frac{5}{3}\right[$$

7. $G(x) = x^2 + 2x + 1$

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$G(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geqslant 0$$

Et par ailleurs :

$$G(x) = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff (x+1) = 0 \iff x = -1$$

De ce fait on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) \geqslant 0\ ;\ G(x) = 0 \iff x = -1}$$

Correction de l'exercice 13

1. $(\boldsymbol{I_8})$ **:** $\boldsymbol{(x+3)^2 > 9x^2}$.

$$\begin{aligned}(I_8)\ :\quad (x+3)^2 > 9x^2 &\iff (x+3)^2 - 9x^2 > 0\\ &\iff (x+3)^2 - (3x)^2 > 0\\ &\iff (x+3-3x)(x+3+3x) > 0\\ &\iff (3-2x)(3+4x) > 0\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(3-2x)$** :

$$\begin{cases}(3-2x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}\\[2ex] (3-2x) > 0 \iff x < \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

- **Étude du signe de $(3+4x)$** :

$$\begin{cases}(3+4x) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{4}\\[2ex] (3+4x) > 0 \iff x > -\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $(3-2x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3+4x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(3-2x)(3+4x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{(x+3)^2 > 9x^2 \iff x \in \left]-\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right[}$$

2. $(\boldsymbol{I_9})$ **:** $\boldsymbol{\dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{4}{4-x^2}}$.

- <u>Les valeurs interdites</u> : Il faut que

$$\begin{cases}x+2 \neq 0 \iff x \neq -2\\ 4-x^2 \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -2\end{cases}$$

- <u>Résolution</u>.

$$\begin{aligned}(I_9)\ :\quad \frac{1}{x+2} \leqslant \frac{4}{4-x^2} &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} \leqslant 0\\ &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leqslant 0\\ &\iff \frac{(2-x)}{(2-x)(2+x)} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leqslant 0\\ &\iff \frac{2-x-4}{(2-x)(2+x)} \leqslant 0\\ &\iff \frac{-2-x}{(2-x)(2+x)} \leqslant 0\end{aligned}$$

On peut remarquer que $-2-x = -(2+x)$. Le tableau de signe s'établit facilement :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $(-2-x)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(2+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{-2-x}{(2-x)(2+x)}$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

$$\boxed{(I_9)\ :\quad \frac{1}{x+2} \leqslant \frac{4}{4-x^2} \iff x \in \left]-\infty\,;\,-2\right[\cup \left]-2\,;\,2\right[}$$

3. $\boldsymbol{(I_{10})\ :\quad \dfrac{1}{x^2} < -1}$.

- Valeur interdite : Il faut que $x^2 \neq 0$ soit x non nul.
- Résolution.
  Pour tout réel x, x^2 est positif est donc pour tout réel non nul, $\dfrac{1}{x^2} > 0$. De ce fait l'inéquation $(I_{10})\ :\quad \dfrac{1}{x^2} < -1$ n'admet pas de solution. $S_{10} = \varnothing$.