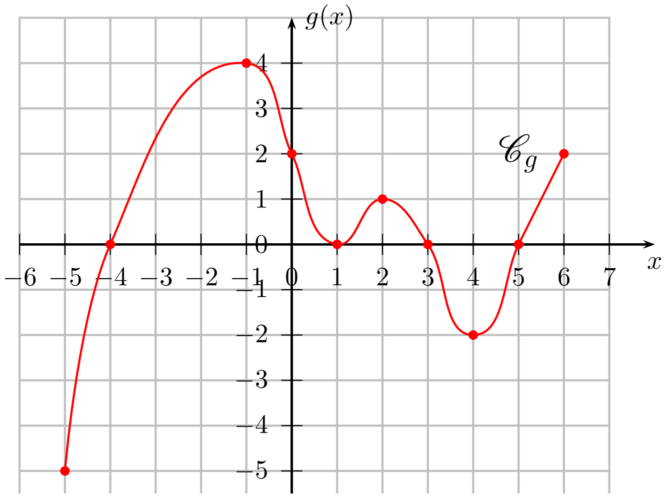
Math93.com

TD 1 - Seconde
Variations de fonction

Partie I. Notion de fonction

Exercice 1. Tableau de variations

On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.



1. Lire l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.
2. Quels sont les maximum et minimum de g sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?
3. **Tableau de variation.**
   - **3. a.** Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   - **3. b.** Donner un encadrement de $g(x)$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 5]$.

> **Réponses**
> ***1.*** $[-5\ ;\ 6]$ / ***2.*** *max 4 atteint pour* $x = -1$ *et min* (-5) *atteint pour* $x = (-5)$. ***3b.*** $g(x) \in [-5\ ;\ 4]$.

Exercice 2. Tableau de variation 1

Une fonction h définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 5]$ admet le tableau de variation ci-dessous.

x	-10		0		2		10
Variations de h	-5	↗	5	↘	-7	↗	7

1. Pour $x \in [-10\ ;\ 2]$, encadrer $h(x)$.
2. Quels sont les maximum et minimum de h sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?
3. Combien l'équation $h(x) = 0$ a-t-elle de solutions sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$?
4. Comparer $h(1)$ et $h(1,5)$. Justifier votre réponse.
5. Combien le réel -2 a-t-il d'antécédents par h ?
6. Donner un encadrement de $h(1)$ puis de $h(6)$. Peut-on les comparer ?
7. Le point de coordonnées $(5\ ;\ 0)$ appartient-il à $\mathscr{C}_h$? Justifier.
8. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe (Oy) ?

> **Réponses**
> ***1.*** $h(x) \in [-7 ; 5]$ / ***2.*** *Max. 7 atteint pour* $x = 10$ *et Min.* -7 *atteint pour* $x = 2$ / ***3.*** *2 solutions* / ***4.*** $h(1) > h(1,5)$ / ***5.*** *3 antécédents*

Exercice 3. Tableau de variation 2

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-4 ; 7]$.

x	-4	2	7
$f(x)$	0	-2	5

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou sont fausses.

1. $f(0) = -4$.

2. $f(2,01) < 0$.

3. $f(-3) > f(-2)$.

4. Si $x \in [-4 ; 2]$, alors $f(x) \in [0 ; -2]$.

5. Pour tout $x \in [-4 ; 2]$, $f(x) \leqslant 0$

6. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $[-4 ; 7]$.

7. Le minimum de f sur $[-4 ; 7]$ est 2.

8. On suppose maintenant que $f(4) = 0$.

- **8. a.** $f(0) < f(6)$.
- **8. b.** Si $f(x) \in]0 ; 5]$, alors $x \in [2 ; 7]$.
- **8. c.** $f(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [-4 ; 2]$.

> **Réponses**
> ***1.*** *Faux* / ***2.*** *?* / ***3.*** *Vrai* / ***4.*** *Faux* / ***5.*** *Vrai* / ***6.*** *Vrai* / ***7.*** *Faux* / ***8.a.*** *Vrai* / ***8.b.*** *Vrai* / ***8.c.*** *Faux*

Exercice 4. Kwyk

Avant d'aller plus loin, testez-vous sur Kwyk.

Exercice 5. Plus théorique (c)

1. Soit la fonction affine f définie par :

$$f(x) = 1 - 5x$$

Établir les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que fonction inverse n'est pas décroissante sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. (*Ex. 36 du livre*)
Soit g une fonction strictement décroissante et définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g(4) = -1$.
Déterminer l'intervalle des nombres réels x tels que $-1 < g(x) \leqslant 1$.

4. (*Ex. 37 du livre*) Soient f une fonction strictement croissante et g une fonction strictement décroissante définies sur R telles que $f(-2) = g(-2)$. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour :

- **4. a.** $x \in [-8 ; -2]$;
- **4. b.** $x \in [-2 ; 0]$.

Exercice 6. La *Vertex Form* c'est ma passion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-2x)^2 - (2x-1)(3x+5)$$

1. Développer $f(x)$.

2. Factoriser $f(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x, la *vertex form* de f est :

$$f(x) = -2\left(x+\frac{11}{4}\right)^2 + \frac{169}{8}$$

4. Déterminer le minimum ou le maximum de f.

Réponses

$f(x) = -2x^2 - 11x + 6$, $f(x) = (2x-1)(-x-6)$

Fin du TD

Partie II. Correction

Correction de l'exercice 5 : Plus théorique

1. Soit la fonction affine f définie par :

$$f(x) = 1 - 5x$$

Établir les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Voir l'exemple du cours.

On part de $a < b$ et on étudie le signe de $f(b) - f(a)$.

$$f(b) - f(a) = 1 - 5b - (1 - 5a) = 5(-b + a)$$

Or puisque $a < b$ alors $(-b + a) < 0$ et donc $f(b) - f(a) < 0$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que fonction inverse n'est pas décroissante sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Corrigé

On a $-1 < 2$ sur I mais

$$f(-1) = -1 < f(2) = \frac{1}{2}$$

donc la fonction inverse n'est pas décroissante sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. (*Ex. 36 du livre*)

Soit g une fonction strictement décroissante et définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g(4) = -1$.

Déterminer l'intervalle des nombres réels x tels que $-1 < g(x) \leqslant 1$.

Corrigé

Comme $g(0) = 1$ et $g(4) = -1$ on a :

$$-1 < g(x) \leqslant 1 \iff g(4) < g(x) \leqslant g(0)$$

et par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$:

$$g(4) < g(x) \leqslant g(0) \iff 4 > x \geqslant 0$$

d'où l'intervalle $[0\ ;\ 4[$.

4. (*Ex. 37 du livre*) Soient f une fonction strictement croissante et g une fonction strictement décroissante définies sur R telles que $f(-2) = g(-2)$. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour :

4. a. $x \in [-8\ ;\ -2]$;

Corrigé

Pour simplifier la rédaction on note : $k = f(-2) = g(-2)$.

$x \in [-8; -2]$ donc $x \leqslant -2$ d'où :

- Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$: $f(x) \leqslant f(-2)$ donc $f(x) \leqslant k$.
- Par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$: $g(x) \geqslant g(-2)$ donc $g(x) \geqslant k$.

On a donc $f(x) \leqslant k \leqslant g(x)$ donc $f(x) \leqslant g(x)$.

4. b. $x \in [-2\ ;\ 0]$.

Corrigé

Pour simplifier la rédaction on note : $k = f(-2) = g(-2)$.

$x \in [-2\ ;\ 0]$ donc $x \geqslant -2$ d'où :

- Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$: $f(x) \geqslant f(-2)$ donc $f(x) \geqslant k$.
- Par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$: $g(x) \leqslant g(-2)$ donc $g(x) \leqslant k$.

On a donc $g(x) \leqslant k \leqslant f(x)$ donc $f(x) \geqslant g(x)$.