Math93.com

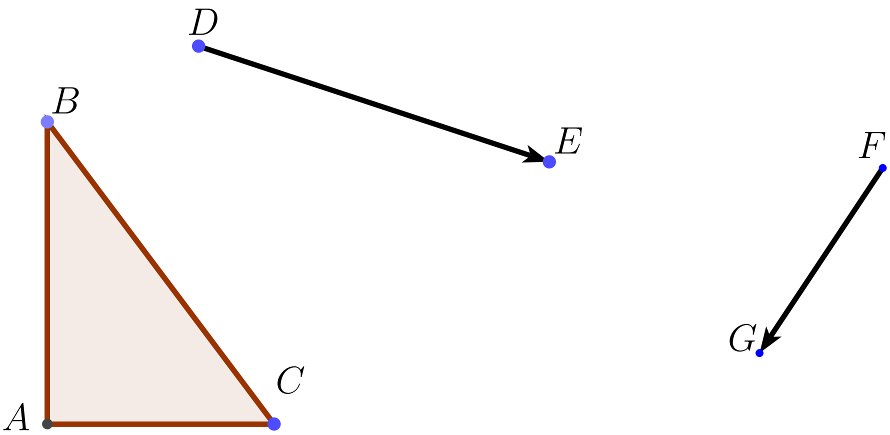
TD 1 - Seconde
Vecteurs - Partie 1

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Partie I. Translation et vecteurs

Exercice 1. Construction avec le compas (c)

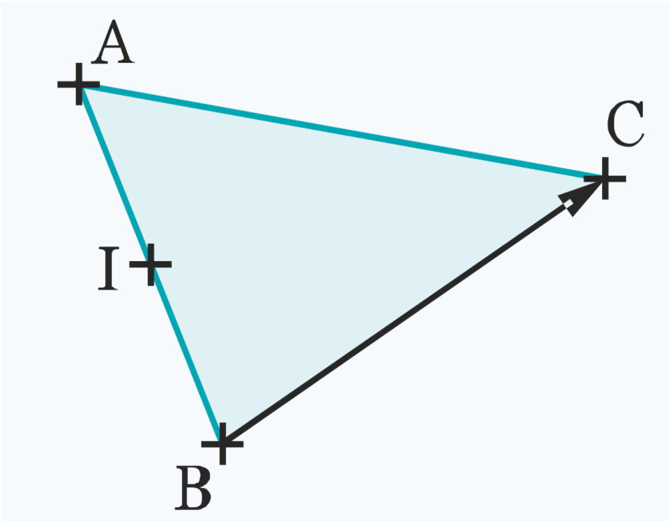
Construire A'B'C', l'image du triangle rectangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ puis A"B"C", l'image du triangle A'B'C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.
Vérifier que les triangles images sont aussi rectangles.
On remarquera que si la construction est correcte, les points C et B" sont confondus .



Exercice 2. A partir d'un triangle (c)

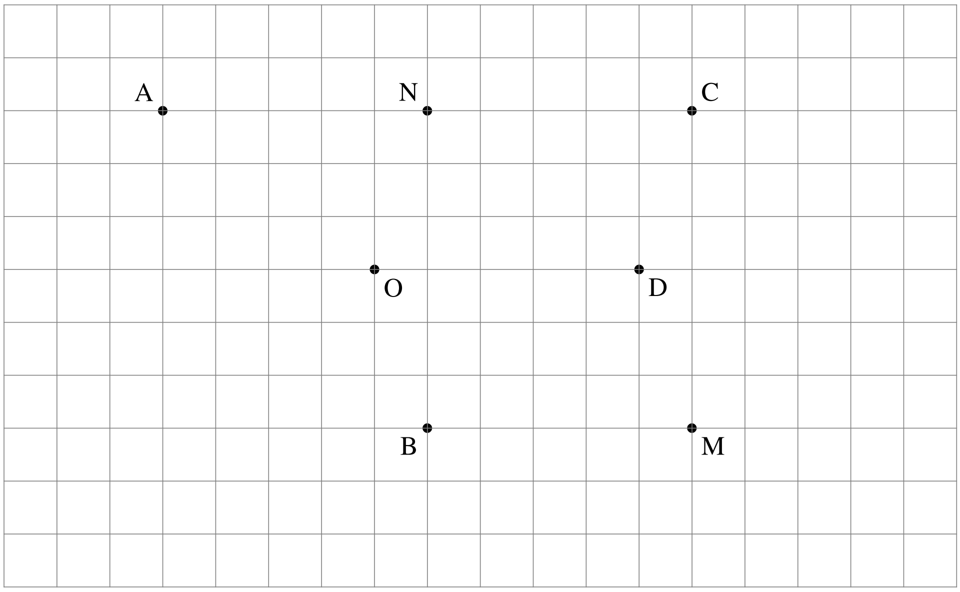
Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de [AB].

1. Sur la figure, construire le point I', image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Sur la figure, construire le point A', image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
3. Démontrer que A'BCA est un parallélogramme.
4. En déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.



Partie II. Sommes de vecteurs et relation de Chasles

Exercice 3. Construction (Vu au Brevet)



1. Quelle est l'image du quadrilatère ODMB par la symétrie d'axe (OD) ?
2. Recopier et compléter les quatre égalités ci-dessous :

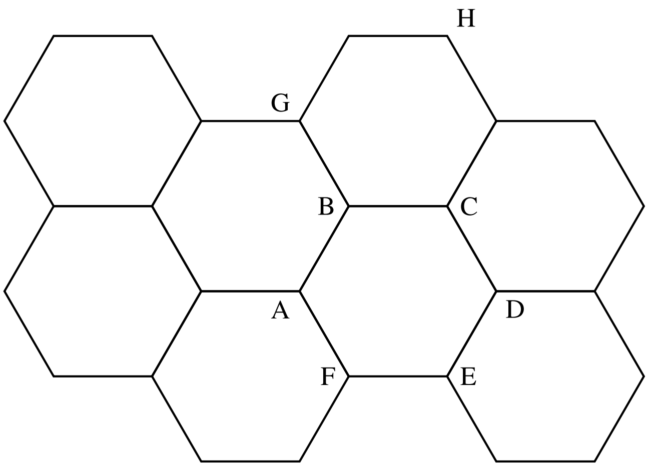
- $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\ldots\mathrm{N}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{M}\ldots} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{NC}} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\ldots}$

3. Quelle est l'image du triangle NOB par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$?

Exercice 4. Des hexagones (Vu au Brevet)

Sur la figure ci-dessous, sont représentés huit hexagones réguliers. Les constructions demandées dans cet exercice doivent être effectuées directement sur cette figure.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
2. Construire le point N tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}N} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}$.
3. Construire le point P tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}P} = \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}$.



Exercice 5. Constructions d'un somme de vecteurs (c)

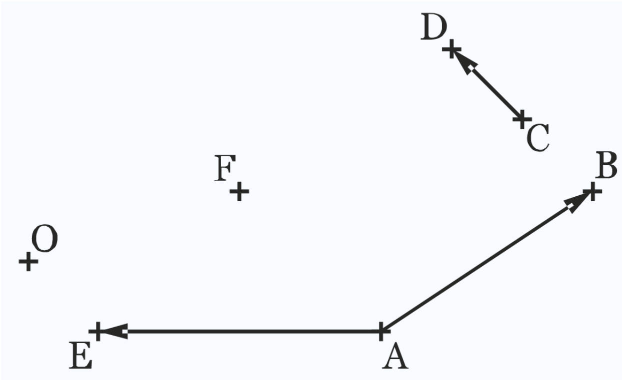
Sur la figure ci-dessous :

1. Tracer le vecteur $\overrightarrow{FF'}$ tel que

$$\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

2. Tracer le vecteur $\overrightarrow{c}$ d'origine O tel que

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$



Exercice 6. Michel Chasles (1793-1880) est votre ami !

On considère quatre points distincts du plan R, S, T et U. On nomme A et B les milieux respectifs de [RU] et [ST].

1. Faire une figure.

2. Démontrer que :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{US}$$

3. Démontrer que :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UT} = 2\overrightarrow{AB}$$

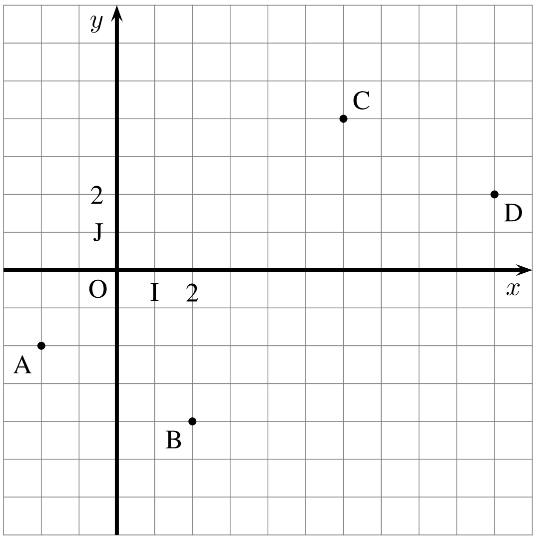
Remarque historique

En 1841 Chasles enseigne à l'école polytechnique puis à la Sorbonne en 1846. Il entre à l'Académie des sciences en 1851.
Chasles expose la relation qui porte son nom à la page 46/643 de son Traité de géométrie supérieure (1852).

Partie III. Coordonnées de vecteurs

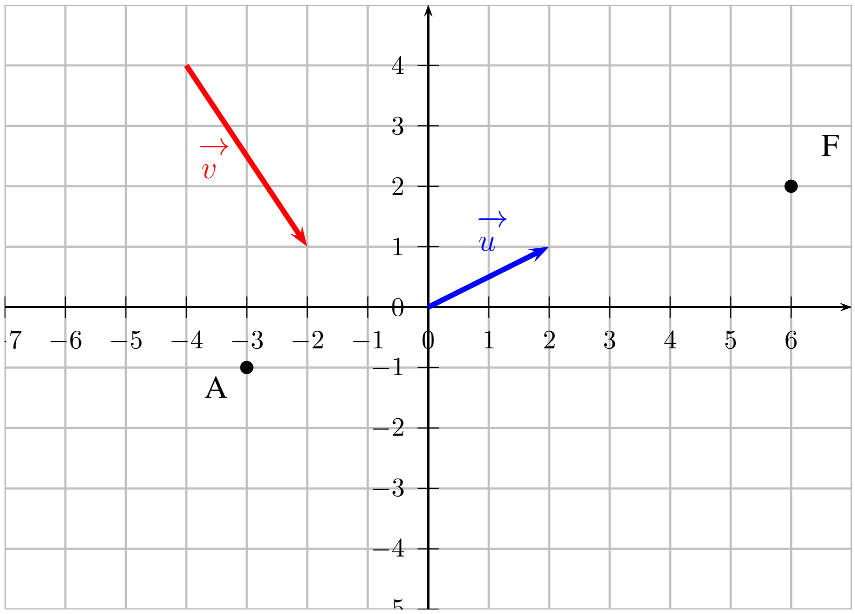
Exercice 7. Coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1. Lire les coordonnées des points A, B et C.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

Exercice 8. Construction et coordonnées



1. Lire les coordonnées les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Construire le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ puis déterminer les coordonnées de ce vecteur somme.
3. Déterminer les coordonnées du point B, image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$.
4. Déterminer les coordonnées du point C, image du point A par la translation de vecteur $\vec{v}$ notée $t_{\vec{v}}$.
5. Déterminer les coordonnées et construire le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donner les coordonnées du point D.
6. Déterminer les coordonnées et construire le vecteur $\overrightarrow{FG} = -\vec{u} - \vec{v}$. Donner les coordonnées du point G.

Réponses

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$; $B(-1\ ;\ 0)$; $C(-1\ ;\ -4)$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$; $D(1\ ;\ -3)$; $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$; $G(2\ ;\ 4)$.

Exercice 9. Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. Soient les points $A(-2\ ;\ 1)$, $T(1\ ;\ 6)$, $R(3\ ;\ 3)$ et $E(0\ ;\ -2)$. Montrer que le quadrilatère ATRE est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point P, sachant que RPTE est un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point S, sachant que T est le milieu du segment [ES].

Réponses

$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $P(4\ ;\ 11)$; $S(2\ ;\ 14)$.

Exercice 10. Une démonstration : ex 58 du livre (c)

On considère les points suivants dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ qui n'est pas nécessairement orthonormé :

$$A(3\ ;\ 5), C(7\ ;\ -9)\ ;\ M(-5\ ;\ 5)\ \text{ et }\ P(5\ ;\ -2)$$

1. Calculer les coordonnées du point M' , symétrique de M par la symétrie de centre P .
2. Vérifier que le point C est l'image de P par la translation du vecteur $\overrightarrow{AP}$. Que peut-on en déduire sur P ?
3. Démontrer que AMCM' est un parallélogramme.

Exercice 11. Un algorithme

On se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Soient les points $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$, $C(x_C\ ;\ y_C)$ et $D(x_D\ ;\ y_D)$.

Écrire fonction python qui prend en argument 3 tuples représentant les coordonnées des points A, B et C et qui renvoie un tuple représentant les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Partie IV. Problèmes de synthèse

Exercice 12. Vecteurs et coordonnées (c)

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A\,(-1\;;\;-2)$, $B\,(5\;;\;-1)$, $C\,(6\;;\;3)$ et $D\,(0\;;\;2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.

2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

3. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

4. Déterminer les coordonnées du point E.

5. Démontrer que : $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.

6. Que peut-on en déduire sur le point B ?

Exercice 13. Lieu géométrique : ex 73 du livre (c)

On considère la configuration suivante :

- A et B sont deux points fixes du plan et I est le milieu de [AB] ;
- C est le cercle de diamètre [AI] ;
- M est un point mobile du cercle C ;
- M' est le point tel que
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer le lieu de parcours de M' selon les positions de M.

1. Construire la figure dans GeoGebra . Pour cela taper dans la fenêtre de gauche les commandes

$$a = vecteur(M, A) + vecteur(M, B)$$

puis dans le menu, 3e onglet utiliser ***représentant*** pour construire, à partir de a, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ d'origine M).

=> Lien vers la figure Geogebra

2. Quel lieu décrit le point M' lorsque M se déplace sur le cercle C (utiliser l'option ***Afficherlatrace*** du point M' en cliquant droit sur le point M') ?

3. On va maintenant prouver cette conjecture.

3. a. Démontrer que
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

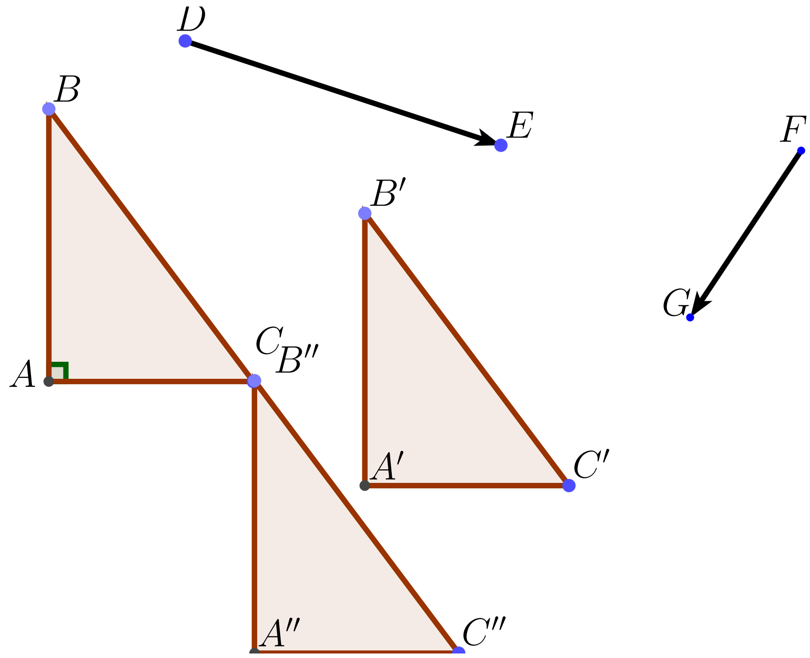
3. b. Que peut-on conclure du point I pour le segment [MM'] ?

3. c. En déduire le lieu de M' lorsque M décrit le cercle de diamètre [AI].

3. d. Démontrer que MAM'B est un parallélogramme.

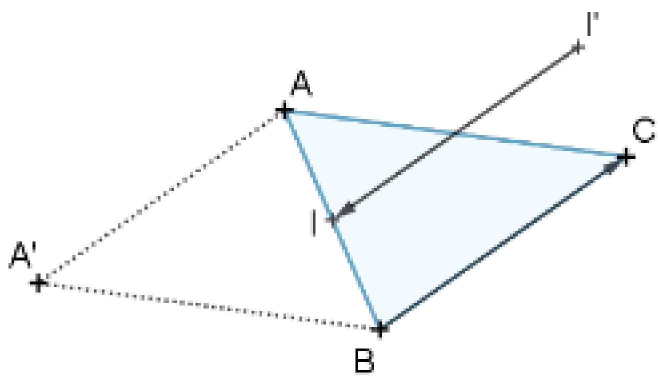
Partie V. Correction

Correction de l'exercice 1 page 1 : Construction avec compas



Exercice 14. Correction de l'exercice 2 page 2 : A partir d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de [AB].



1. Sur la figure, construire le point I', image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Sur la figure, construire le point A', image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
3. Démontrer que A'BCA est un parallélogramme.

Corrigé

- Par définition de la translation, on a d'après les constructions :

$$\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{II'}$$

- donc

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'A}$$

- Et ainsi A'BCA est un parallélogramme.

4. En déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

Corrigé

Dans un parallèlogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Or I est le milieu de [AB] , diagonale du parallélogramme, donc I est également milieu de [A'C] , la deuxième diagonale de ce parallélogramme. Et donc :

$$\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$$

Correction de l'exercice 5 page 4 : Constructions d'un somme de vecteurs

Sur la figure ci-dessous :

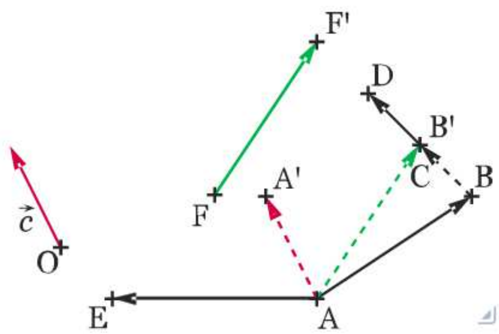
1. Tracer le vecteur $\overrightarrow{FF'}$ tel que
$$\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$
2. Tracer le vecteur $\vec{c}$ d'origine O tel que
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

Méthode

1. On construit le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$ puis, en appliquant la relation de Chasles, on obtient en vert $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ puis $\overrightarrow{FF'}$.

2. En appliquant la propriété du parallélogramme, on obtient en rouge $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ puis le vecteur $\vec{c}$ d'origine O.

Solution



Correction de l'exercice 10 : Une démonstration : ex 58 du livre

On considère les points suivants dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ qui n'est pas nécessairement orthonormé :

$$A(3\ ;\ 5), C(7\ ;\ -9)\ ;\ M(-5\ ;\ 5) \text{ et } P(5\ ;\ -2)$$

1. Calculer les coordonnées du point M', symétrique de M par la symétrie de centre P .

P est le milieu de $[MM']$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{PM'}$ sont égaux. Si on pose $M'(x; y)$, on sait donc que les coordonnées de $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}10\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PM'}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}$ sont égales. En résolvant les deux équations on trouve $M'(15; -9)$.

2. Vérifier que le point C est l'image de P par la translation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$. Que peut-on en déduire sur P ?

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs ont mêmes coordonnées et sont donc égaux. Donc C est bien l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AP}$. De plus cela signifie aussi que P est le milieu du segment $[AC]$.

3. Démontrer que AMCM' est un parallélogramme.

Le point P est - par construction - le milieu de $[MM']$ et - d'après la question précédente - le milieu de $[AC]$. Les deux diagonales de $AMCM'$ se croisent donc en un même milieu et donc $AMCM'$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 12

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A(-1\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ -1)$, $C(6\ ;\ 3)$ et $D(0\ ;\ 2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ ce qui montre que ABCD est un parallélogramme.

3. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
4. Déterminer les coordonnées du point E.

Corrigé

On passe aux cordonnées dans la relation vectorielle précédente :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} &\iff \begin{pmatrix}x_E-(-1)\\y_E-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-1)\\-1-(-2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5-6\\-1-3\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}x_E+1\\y_+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}x_E+1\\y_E+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le point E est de coordonnées $\boxed{E(4\ ;\ -5)}$.

5. Démontrer que : $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.

Corrigé

On a

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}}$$

6. Que peut-on en déduire sur le point B ?

Corrigé

Le point B est donc le milieu du segment [EC] puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.

Correction de l'exercice 13 : Lieu géométrique - ex 73 du livre

On considère la configuration suivante :

- A et B sont deux points fixes du plan et I est le milieu de [AB] ;
- C est le cercle de diamètre [AI] ;
- M est un point mobile du cercle C ;

- M' est le point tel que

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer le lieu de parcours de M' selon les positions de M.

1. Construire la figure dans GeoGebra . Pour cela taper dans la fenêtre de gauche les commandes

$$a = vecteur(M, A) + vecteur(M, B)$$

puis dans le menu, 3e onglet utiliser ***représentant*** pour construire, à partir de a, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ d'origine M).

=> Lien vers la figure Geogebra

2. Quel lieu décrit le point M' lorsque M se déplace sur le cercle C (utiliser l'option ***Afficherlatrace*** du point M' en cliquant droit sur le point M') ?

Corrigé

Le point M' décrit le cercle de diamètre [BI] .

3. On va maintenant prouver cette conjecture.

3. a. Démontrer que

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Corrigé

En décomposant $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par le point I dans la relation de Chasoles , on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\overrightarrow{0}}\end{aligned}$$

Or I est le milieu de [AB] donc

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$$

D'où, comme

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

3. b. Que peut-on conclure du point I pour le segment [MM'] ?

Corrigé

D'après la question précédente et d'apès les donnés :

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM'}\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$$

Donc I est le milieu du segment [MM'].

3. c. En déduire le lieu de M' lorsque M décrit le cercle de diamètre [AI].

Corrigé

D'après la question précédente, M' est l'image du point M par la symétrie centrale de centre I .
Comme M décrit un cercle, M' aussi décrit un cercle de même rayon de surcroît.
De plus l'image de A par cette symétrie est B donc M' décrit le cercle de diamètre [IB] .

3. d. Démontrer que MAM'B est un parallélogramme.

Corrigé

MAM'B est un quadrilatère dont les diagonales [AB] et [MM'] se coupent en un même milieu, le point I .
MAM'B est donc un parallélogramme.