Math93.com

# TD 1 - Seconde
# Vecteurs - Partie 2

*Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.*

## Table des matières

# Partie I. Colinéarité

## Exercice 1. Alignement de 3 points

On se place dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan. Soient les points : $A(4\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ 4)$ , $C(1\ ;\ -6)$ et $D(12\ ;\ -3)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ? Les points A, B et D sont-ils alignés ?

**Réponses**
*Non et Oui.*

## Exercice 2. Vecteurs colinéaires

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan. Pour quelles(s) valeurs(s) du réel $x$ les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

**1.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x-6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ x \end{pmatrix}$ ;

**2.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 9 \\ x-2 \end{pmatrix}$.

**Réponses**
*1°)* $x = 3$ ; *2°)* $x = 5$ *ou* $x = -1$.

## Exercice 3. Vecteurs colinéaires

Soient E et F deux points distincts du plan et M tel que $3\overrightarrow{ME} - 5\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{0}$.

1. Justifier que les points E, F et M sont alignés.
2. Déterminer le réel $k$ tel que $\overrightarrow{EM} = k\overrightarrow{EF}$ puis placer le point M sur la droite (EF).

**Réponses**

*1°)* $\overrightarrow{ME} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{MF}$ ; *2°)* $k = \dfrac{5}{2}$.

## Exercice 4. Eclipse : ex 66

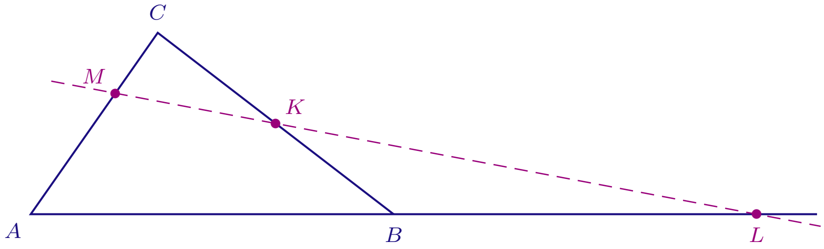
Une éclipse solaire se réalise lorsque la Lune passe entre la Terre et le Soleil. On supposera qu'il faut un alignement parfait pour obtenir une éclipse.
Dans un repère ayant pour origine le Soleil, on a relevé les coordonnées de la Terre T ainsi que celles de la Lune L :

$$T(120\,;\,-90) \text{ et } L(119,7\,;\,89,775)$$

Une éclipse solaire a-t-elle lieu dans ce cas ?

## Exercice 5. (c) Un problème

Dans la figure ci-dessous, $ABC$ est un triangle, $K$ est le milieu de $[BC]$, $L$ est le symétrique du point $A$ par rapport à $B$.
Déterminer la position du point $M$ sur la droite $(AC)$ pour que les points $K$, $L$ et $M$ soient alignés.




**Aide**

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

## Exercice 6. (c) Construction de points

**Remarque**

La méthode pour construire $M$ défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\overrightarrow{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés $A$, $B$ et $C$.
Construire le point $M$ défini par

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$$

## Exercice 7. (c) Parallélisme, alignement

**Remarque**

Montrer que des points sont alignés, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit $ABC$ un triangle, $I$ le milieu de $[AC]$, $M$ est le symétrique de $B$ par rapport à $C$ et le point $N$ est tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Les points $M$, $I$ et $N$ sont-ils alignés ?

# Partie II. Barycentre

## Barycentre de 2 points *(barycenter)*

**Définition 1**

Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan et $a$ et $b$ deux réels tels que $a+b \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés $(A, a)$ et $(B, b)$ le point $G$ vérifiant :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.$$

On note :

$$G = \text{bar}\left\{(A, a), (B, b)\right\}.$$

## Exercice 8. (c) Barycentre de deux points (construction)

Soient $A$ et $B$ deux points distincts et $a$ et $b$ deux réels tels que $a+b \neq 0$. On considère le point $G = \text{bar}\left\{(A, a), (B, b)\right\}$.

**1.** Montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}.$$

**2.** Démontrer que les point $A$, $B$ et $G$ sont alignés.

**3.** On suppose dans toute la suite que $a > 0$ et $b > 0$.

**3. a.** Montrer que $G$ appartient au segment $[AB]$.

**3. b.** Construire $G$ à la règle et au compas dans chacun des cas suivants :

$$(a, b) = (1, 1) \qquad (a, b) = (1, 2) \qquad (a, b) = (3, 2).$$

**4.** (Cas général) On suppose toujours $a > 0$ et $b > 0$. Décrire une méthode de construction de $G$ à la règle et au compas en fonction des entiers $a$ et $b$.

## Exercice 9. Barycentre de deux points et coordonnées

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points

$$A(1; -2) \qquad \text{et} \qquad B(5; 4).$$

On considère le point $G = \text{bar}\left\{(A, a), (B, b)\right\}$., où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a+b \neq 0$.

**1.** Exprimer les coordonnées du point $G$ en fonction de $a$ et de $b$.

**2.** Application : déterminer les coordonnées de $G$ dans chacun des cas suivants :

$$(a, b) = (1, 1) \qquad (a, b) = (1, 2) \qquad (a, b) = (3, 2).$$

## Exercice 10. (c) Barycentre de trois points

**Définition 2** (Barycentre de 3 points)

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan et $a$ , $b$ et $c$ trois réels tels que $a+b+c \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés $\big(A, a\big)$, $\big(B, b\big)$ et $\big(C, c\big)$ le point $G$ vérifiant :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

On note :

$$G = \text{bar}\left\{\big(A, a\big), \big(B, b\big)\big), \big(C, c\big)\right\}.$$

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés et $a$, $b$, $c$ trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. On considère le point

$$G = \text{bar}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}.$$

**1.** Montrer que :

$$\boxed{(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}$$

**2.** (Construction) On suppose dans cette question que $a+b+c > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.
On pose

$$k = \frac{b}{a+b+c} \qquad \text{et} \qquad \ell = \frac{c}{a+b+c}.$$

**2. a.** Montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = k\,\overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{AC}}$$

**2. b.** Construire un point $D$ sur la droite $(AB)$ tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}$.

**2. c.** Construire un point $E$ sur la droite $(AC)$ tel que $\overrightarrow{AE} = \ell\,\overrightarrow{AC}$.

**2. d.** En déduire une construction du point $G$ en utilisant une somme de vecteurs (parallélogramme).

**3.** On pose $H = \text{bar}\,\{(B, b), (C, c)\}$ (avec $b + c \neq 0$).

**3. a.** Montrer que :

$$\boxed{(b+c)\,\overrightarrow{AH} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}$$

**3. b.** En déduire que :

$$\boxed{G = \text{bar}\,\{(A, a), (H, b+c)\}}.$$

(On dit que le barycentre est associatif : construction en deux étapes.)

**4.** Application avec coordonnées.
Dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on donne :

$$A(2;-1), \qquad B(8;1), \qquad C(3;7), \qquad a=1,\ b=2,\ c=3.$$

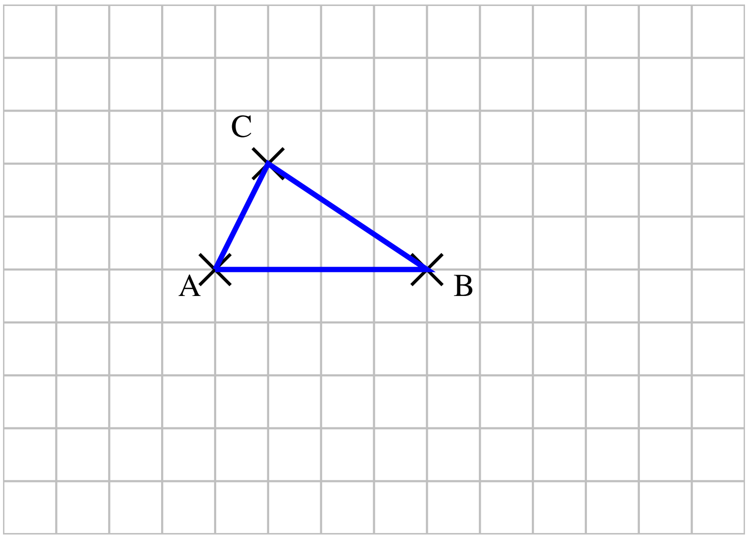
**4. a.** Calculer les coordonnées de $H = \text{bar}\,\{(B, 2), (C, 3)\}$.

**4. b.** Puis calculer les coordonnées de $G = \text{bar}\,\{(A, 1), (H, 5)\}$.

**4. c.** Vérifier que ces coordonnées coïncident avec celles obtenues directement par la formule du barycentre de trois points.

# Partie III. Problèmes de synthèse

## Exercice 11. Construction et démonstration (c)




On considère un triangle ABC.

1. Construire les points I, J, K et L définis par :

   **1. a.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ;

   **1. b.** $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ;

   **1. c.** $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ;

   **1. d.** $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$ ;

2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.
3. Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.
4. En déduire que le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.
5. Démontrer que les points I, B, J et L sont alignés.

## Exercice 12. Vecteurs et coordonnées 1 (c)

Dans un repère du plan $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points : $D\,(-2\ ;\ 4)$, $E\,(-1\ ;\ 1)$ et $F\,(5\ ;\ 4)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. On considère les points R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{DR} = 4\,\overrightarrow{DE} \quad , \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} \quad , \quad \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$$

   Déterminer les coordonnées des points R, S et T.

3. Démontrer que les droite (ST) et (FR) sont parallèles.
4. Montrer que les coordonnées du milieu K du segment [DR] sont $K\,(0\ ;\ -2)$.
5. En démontrant par exemple que les vecteurs $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, prouver que les points S, T et K sont alignés.

## Exercice 13. Vecteurs et coordonnées 2 (c)

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A\,(-1\ ;\ -2)$, $B\,(5\ ;\ -1)$, $C\,(6\ ;\ 3)$ et $D\,(0\ ;\ 2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
3. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
4. Déterminer les coordonnées du point E.
5. Démontrer que : $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
6. Que peut-on en déduire sur le point B ?

## Exercice 14. Ex. 77

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère les points suivants :

$$A(2;1), B(-2;3), C(-1;-2) \text{ et } D(-3;-1)$$

**1.** Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont-ils colinéaires ?

**2.** Démontrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze.

**3.** Soit E, le point de coordonnées $(3;-4)$.

**3. a.** Démontrer que les coordonnées du milieu M de [AB] sont (0 ;2).

**3. b.** Les points D,C et E sont-ils alignés ? Justifier.

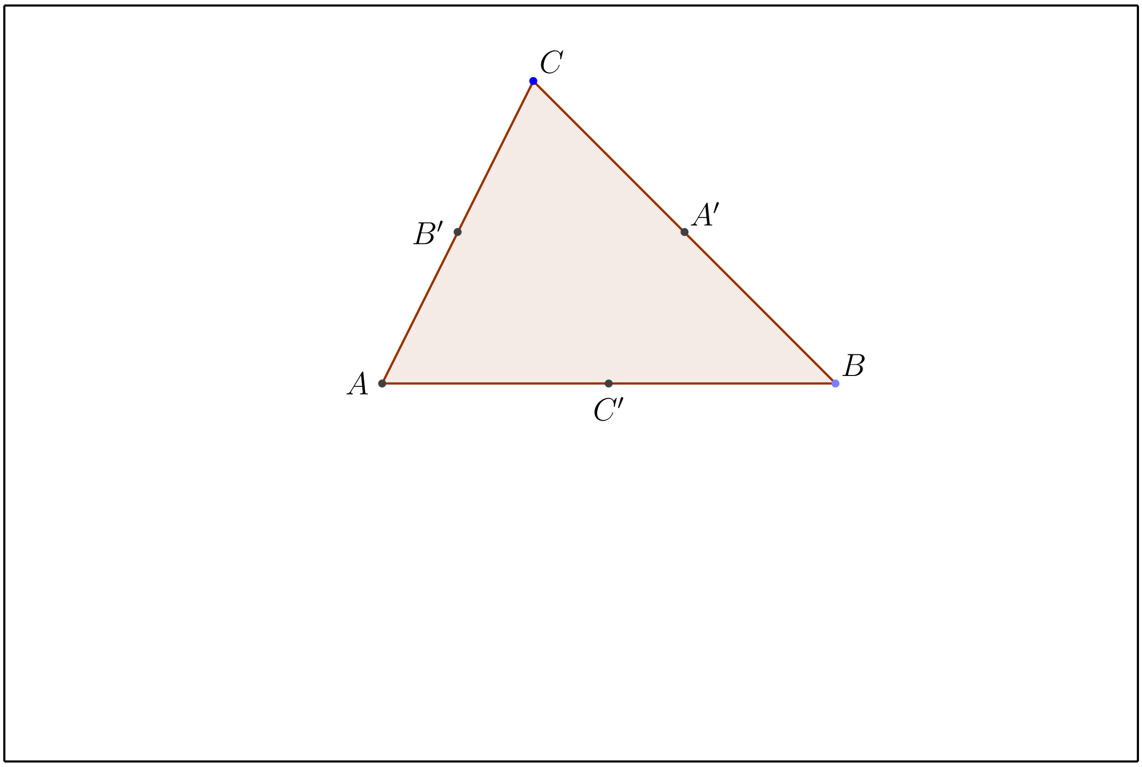
**3. c.** Soit F, le point défini par $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Calculer les coordonnées du point F.

**3. d.** Les points M, F et E sont-ils alignés ? Justifier.

## Exercice 15. * Homothétie : ex 79

K,L et M sont trois points alignés. K', L', M' sont leurs images respectives par l'homothétie h de centre P et de rapport $k$.
Montrer que les points K', L', M' sont alignés.

## Exercice 16. * Les médianes ... c'est ma passion !




On considère un triangle quelconque ABC. On note A' le milieu du segment [BC], B' le milieu du segment [AC] et C' le milieu du segment [AB].

**1.** Construire le point $C_1$ tel que :

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \tag{1}$$

**2.** Démontrer de deux façons différentes que :

$$\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{CC'}$$

D'une part à l'aide de la relation de Chasles et de l'égalité **(1)**, d'autre part en utilisant le fait que par construction, $ACBC_1$ est un quadrilatère particulier.

**3.** On considère le point M, isobarycentre des points $A$, $B$ et $C$ :

$$M = \text{bar}\left\{\left(A, 1\right), \left(B, 1\right)\right), \left(C, 1\right)\right\}.$$

On a donc :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \tag{2}$$

**3. a.** Montrer en utilisant astucieusement Chasles dans la relation **(2)** que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$$

**3. b.** Puis que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

**3. c.** En déduire que le point M appartient à la médiane (CC') puis construire ce point M.

**3. d.** Montrer que : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et en déduire que le point M appartient à la médiane (BB').

**3. e.** Montrer que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et en déduire que le point M appartient à la médiane (AA').

**3. f.** Que vient-on de démontrer ?

**4.** Construire le point $A_1$ tel que :

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \tag{3}$$

**5.** Démontrer B est le milieu du segment $[A_1C_1]$ puis que $\overrightarrow{A_1C_1} = 4\overrightarrow{A'C'}$.

## Exercice 17. ** Déterminant et colinéarité : une preuve du cours (ex. 73)

**Théorème 1**

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=0 \iff xy'-x'y=0$$

**1.** Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors : $det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=0$.

**2.** On cherche à montrer la réciproque.

Supposons maintenant que $det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=0$.

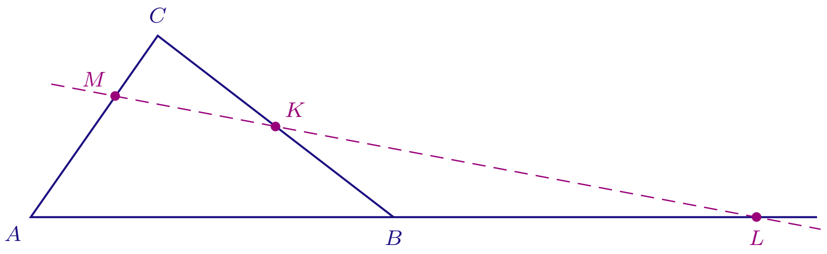
**2. a.** On se place dans le cas où au moins un des quatre nombres $x, x', y$ et $y'$ est égal à 0.
Démontrer que, dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**2. b.** On suppose maintenant que tous les nombres $x, x', y$ et $y'$ sont différents de 0.
Démontrer que $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$ et conclure.

# Partie IV. Correction

## Correction de l'exercice 5

*Dans la figure ci-dessous, $ABC$ est un triangle, $K$ est le milieu de $[BC]$, $L$ est le symétrique du point $A$ par rapport à $B$. Déterminer la position du point $M$ sur la droite $(AC)$ pour que les points $K$, $L$ et $M$ soient alignés.*




### Corrigé

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

- Les coordonnées du point $K$ milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
- $L$ est le symétrique du point $A$ par rapport à $B$ donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point $L$ sont $L\,(2;0)$.
- $M$ est un point de la droite $(AC)$ donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où $M$ a pour coordonnées $M\,(0;y)$.

Les points $K$, $L$ et $M$ sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ :

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} x_M - x_L \\ y_M - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 0 - 2 \\ y - 0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour $y$ solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2} \times y - (-2) \times \frac{1}{2} = 0 \iff -\frac{3}{2} \times y = -1 \iff y = \frac{2}{3}$$

Ainsi, $M$ est le point de la droite $(AC)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

## Correction de l'exercice 6 page 7 : Construction de points

**Remarque**

La méthode pour construire $M$ défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés $A$, $B$ et $C$.
Construire le point $M$ défini par

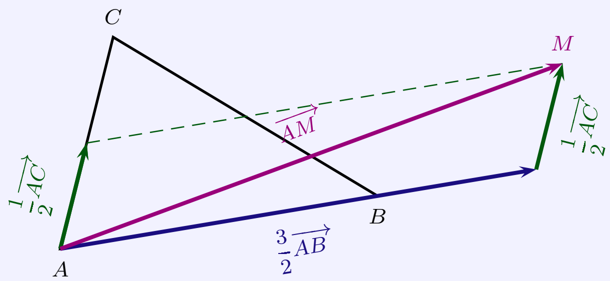
$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$$

**Corrigé**

- Choisissons par exemple $A$ comme « origine connue »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \\
&\iff -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

- Nous pouvons construire le point $M$ :



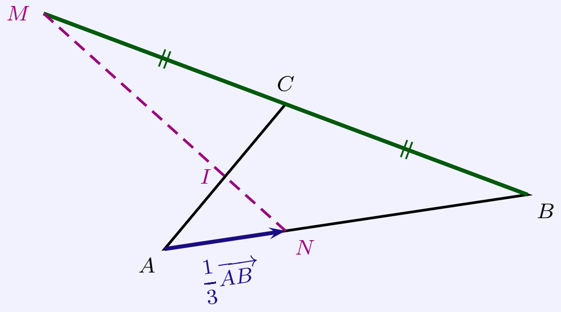
## Correction de l'exercice 7 page 8 : Parallélisme et alignement

**Remarque**

Montrer que des points sont alignés, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit $ABC$ un triangle, $I$ le milieu de $[AC]$, $M$ est le symétrique de $B$ par rapport à $C$ et le point $N$ est tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Les points $M$, $I$ et $N$ sont-ils alignés ?

**Corrigé**




- $I$ est le milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- $M$ est le symétrique de $B$ par rapport à $C$ donc $C$ est le milieu du segment $[BM]$ d'où $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI}\\ &= \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IN} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

et

$$\overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

d'où

$$\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IN}$$

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires donc les points $M$, $I$ et $N$ sont alignés.

## Correction de l'exercice 8 : Barycentre de deux points (construction)

Soient $A$ Et $B$ deux points distincts et $a$ et $b$ deux réels tels que $a+b\neq 0$. On considère le point $G=\text{bar}\Big((A,a),(B,b)\Big)$.

**1.** Montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}.$$

**2.** Démontrer que les point $A$, $B$ et $G$ sont alignés.

**3.** On suppose dans toute la suite que $a>0$ et $b>0$.

**3. a.** Montrer que $G$ appartient au segment $[AB]$.

**3. b.** Construire $G$ à la règle et au compas dans chacun des cas suivants :

$$(a,b)=(1,1) \qquad (a,b)=(1,2) \qquad (a,b)=(3,2).$$

**4.** (Cas général) On suppose toujours $a>0$ et $b>0$. Décrire une méthode de construction de $G$ à la règle et au compas en fonction des entiers $a$ et $b$.

### Corrigé

**1.** Par définition du barycentre :

$$a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}.$$

Or :

$$\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}.$$

On remplace dans l'égalité :

$$a\,\overrightarrow{GA}+b\big(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\big)=\overrightarrow{0} \quad\Longrightarrow\quad (a+b)\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA}=-\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

En multipliant par $-1$ :

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}.$$

**2.** Démontrer que les point $A$, $B$ et $G$ sont alignés.
D'après la relation précédente, les vecteur $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points $A$, $B$ et $G$ sont alignés.

**3.** On suppose $a>0$ et $b>0$.

**3. a.** On a :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $a>0$ et $b>0$, on obtient $a+b>0$ et donc :

$$0<\frac{b}{a+b}<1.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ est un multiple positif de $\overrightarrow{AB}$, de coefficient strictement compris entre $0$ et $1$. Donc $G$ est situé sur le segment $[AB]$ :

$$\boxed{G\in[AB]}$$

**3. b.**
- Cas $(a,b)=(1,1)$.
Alors :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Donc $G$ est le milieu de $[AB]$ : on construit le milieu du segment.
- Cas $(a,b)=(1,2)$.
Alors :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

On construit sur $(AB)$ le point $G$ tel que $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{2}{3}$ par Thalès :
Tracer une demi-droite $[Ax)$ quelconque, y reporter trois segments égaux $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, relier $A_3$ à $B$, puis tracer par $A_2$ la parallèle à $(A_3B)$. L'intersection avec $(AB)$ est le point $G$.

- Cas $(a, b) = (3, 2)$.
Alors :
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$
On construit sur $(AB)$ le point $G$ tel que $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{2}{5}$ par Thalès :
Tracer une demi-droite $[Ax)$, y reporter cinq segments égaux $AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_4A_5$, relier $A_5$ à $B$, puis tracer par $A_2$ la parallèle à $(A_5B)$. L'intersection avec $(AB)$ est le point $G$.

**4.** Méthode générale (Thalès).
On veut construire $G$ tel que :
$$\frac{AG}{AB} = \frac{b}{a+b}.$$

- Tracer une demi-droite $[Ax)$.
- Sur $[Ax)$, reporter $a + b$ segments égaux :
$$AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{a+b-1}A_{a+b}.$$
- Relier $A_{a+b}$ à $B$.
- Tracer par $A_b$ la parallèle à $\big(A_{a+b}B\big)$ ; elle coupe $(AB)$ en $G$.

Alors, par Thalès :
$$\frac{AG}{AB} = \frac{AA_b}{AA_{a+b}} = \frac{b}{a+b},$$
ce qui prouve que le point construit est bien $G$.

$$\boxed{\text{Le point obtenu est le barycentre } G = \mathrm{bar}\big((A, a), (B, b)\big).}$$

## Correction de l'exercice 10 : barycentre de trois points

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés et $a$, $b$, $c$ trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. On considère le point

$$G = \text{bar}\,\{(A,a),(B,b),(C,c)\}\,.$$

**1.** Montrer que :

$$\boxed{(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}$$

### Corrigé

On rappelle la propriete caracteristique du barycentre : si $G = \text{bar}\,\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ avec $a+b+c \neq 0$, alors

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Or

$$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff a\,\overrightarrow{GA} + b\big(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\big) + c\big(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\big) = \vec{0} \\ &\iff (a+b+c)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff (a+b+c)\,\overrightarrow{GA} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC}\,. \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$, donc

$$\begin{aligned} (a+b+c)\,\overrightarrow{GA} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC} &\iff -(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC} \\ &\iff \boxed{(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}. \end{aligned}$$

**2.** (Construction) On suppose dans cette question que $a+b+c>0$, $b>0$ et $c>0$.
On pose

$$k = \frac{b}{a+b+c} \qquad \text{et} \qquad \ell = \frac{c}{a+b+c}.$$

**2. a.** Montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = k\,\overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{AC}}$$

### Corrigé

D'apres la question 1 :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}\,.$$

Comme $a+b+c \neq 0$, on divise par $a+b+c$ :

$$\begin{aligned} (a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{AC} \\ &\iff \boxed{\overrightarrow{AG} = k\,\overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{AC}}. \end{aligned}$$

**2. b.** Construire un point $D$ sur la droite $(AB)$ tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}$.

### Corrigé

On a $a+b+c>0$ et $b>0$, donc

$$k = \frac{b}{a+b+c} > 0.$$

On construit alors $D$ sur la demi-droite $[AB)$ tel que

$$\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB}\,.$$

(Construction possible par Thalès : réalisation d'une multiplication de segment par un réel $k > 0$.)

**2. c.** Construire un point $E$ sur la droite $(AC)$ tel que $\overrightarrow{AE} = \ell\,\overrightarrow{AC}$.

**Corrigé**

On a $a+b+c>0$ et $c>0$, donc

$$\ell = \frac{c}{a+b+c} > 0.$$

On construit alors $E$ sur la demi-droite $[AC)$ tel que

$$\overrightarrow{AE} = \ell\,\overrightarrow{AC}.$$

(Construction possible par Thales.)

**2. d.** En déduire une construction du point $G$ en utilisant une somme de vecteurs (parallélogramme).

**Corrigé**

D'apres (b) et (c),

$$\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = \ell\,\overrightarrow{AC}.$$

Or, d'apres (a),

$$\overrightarrow{AG} = k\,\overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{AC}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= k\,\overrightarrow{AB} + \ell\,\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}.$$

On construit alors $G$ comme quatrieme sommet du parallelogramme de cotes $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ :

- tracer par $D$ la parallele a $(AC)$ ;
- tracer par $E$ la parallele a $(AB)$ ;
- leur intersection est $G$.

**3.** On pose $H = \text{bar}\,\{(B,b),(C,c)\}$ (avec $b+c \neq 0$).

**3. a.** Montrer que :

$$\boxed{(b+c)\,\overrightarrow{AH} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}$$

**Corrigé**

Comme $H = \text{bar}\,\{(B,b),(C,c)\}$ avec $b+c \neq 0$, on a :

$$b\,\overrightarrow{HB} + c\,\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Or

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}.$$

Donc

$$\begin{aligned}b\,\overrightarrow{HB} + c\,\overrightarrow{HC} = \vec{0} &\iff b\big(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\big) + c\big(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\big) = \vec{0}\\ &\iff (b+c)\,\overrightarrow{HA} + b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\iff (b+c)\,\overrightarrow{HA} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{HA} = -\overrightarrow{AH}$, donc

$$\begin{aligned}(b+c)\,\overrightarrow{HA} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC} &\Longleftrightarrow -(b+c)\,\overrightarrow{AH} = -b\,\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{AC}\\ &\Longleftrightarrow \boxed{(b+c)\,\overrightarrow{AH} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}.\end{aligned}$$

**3. b.** En déduire que :

$$\boxed{G = \text{bar}\,\{(A,a),(H,b+c)\}}.$$

(On dit que le barycentre est associatif : construction en deux étapes.)

## Corrigé

D'après la question 1 :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}.$$

D'après (a) :

$$(b+c)\,\overrightarrow{AH} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}.$$

Donc

$$\begin{aligned}(a+b+c)\,\overrightarrow{AG} = (b+c)\,\overrightarrow{AH} &\Longleftrightarrow (a+b+c)\,\overrightarrow{AG} - (b+c)\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0}\\ &\Longleftrightarrow (a+b+c)\,\overrightarrow{AG} - (b+c)\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH}\right) = \overrightarrow{0}\\ &\Longleftrightarrow (a+b+c)\,\overrightarrow{AG} - b\overrightarrow{AG} - b\overrightarrow{GH} - c\overrightarrow{AG} - c\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}\\ &\Longleftrightarrow a\,\overrightarrow{AG} - b\,\overrightarrow{GH} - c\,\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}\\ &\Longleftrightarrow a\,\overrightarrow{AG} + (b+c)\,\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{G = \text{bar}\,\{(A,a),(H,b+c)\}}.$$

**4.** Application avec coordonnées.
Dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on donne :

$$A(2;-1), \qquad B(8;1), \qquad C(3;7), \qquad a=1,\ b=2,\ c=3.$$

**4. a.** Calculer les coordonnées de $H = \text{bar}\,\{(B,2),(C,3)\}$.

## Corrigé

On sait que $H = \text{bar}\,\{(B,2),(C,3)\}$ et $2+3 \neq 0$, donc :

$$2\,\overrightarrow{HB} + 3\,\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Or

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC},$$

donc :

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{HB} + 3\,\overrightarrow{HC} = \vec{0} &\Longleftrightarrow 2\big(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\big) + 3\big(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\big) = \vec{0}\\ &\Longleftrightarrow 5\,\overrightarrow{HA} + 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\Longleftrightarrow 5\,\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on passe directement aux coordonnées :

$$5\,\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 5(x_H - 2) &= 2(8-2) + 3(3-2) \\ 5(y_H + 1) &= 2(1-(-1)) + 3(7-(-1)) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 5x_H - 10 &= 12 + 3 \\ 5y_H + 5 &= 4 + 24 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 5x_H - 10 &= 15 \\ 5y_H + 5 &= 28 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 5x_H &= 25 \\ 5y_H &= 23 \end{cases}$$

d'ou :

$$\boxed{H\left(5; \frac{23}{5}\right)}.$$

**4. b.** Puis calculer les coordonnées de $G = \text{bar}\{(A,1),(H,5)\}$.

## Corrigé

On sait que $G = \text{bar}\{(A,1),(H,5)\}$ et $1 + 5 \neq 0$, donc :

$$\overrightarrow{GA} + 5\,\overrightarrow{GH} = \vec{0}.$$

Or

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH},$$

donc :

$$\overrightarrow{GA} + 5\,\overrightarrow{GH} = \vec{0} \iff \overrightarrow{GA} + 5\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH}\right) = \vec{0}$$
$$\iff 6\,\overrightarrow{GA} + 5\,\overrightarrow{AH} = \vec{0}$$
$$\iff 6\,\overrightarrow{AG} = 5\,\overrightarrow{AH}.$$

Dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, avec $H\left(5; \frac{23}{5}\right)$ :

$$6\,\overrightarrow{AG} = 5\,\overrightarrow{AH} \iff \begin{cases} 6(x_G - 2) &= 5(5-2) \\ 6(y_G + 1) &= 5\left(\frac{23}{5} + 1\right) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x_G - 12 &= 15 \\ 6y_G + 6 &= 28 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x_G &= 27 \\ 6y_G &= 22 \end{cases}$$

d'ou :

$$\boxed{G\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right)}.$$

**4. c.** Vérifier que ces coordonnées coïncident avec celles obtenues directement par la formule du barycentre de trois points.

## Corrigé

D'apres la question 1, avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ :

$$6\,\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}.$$

Dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on passe directement aux coordonnées :

$$6\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6(x_G - 2) & = & 2(8-2) + 3(3-2) \\ 6(y_G + 1) & = & 2(1-(-1)) + 3(7-(-1)) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6x_G - 12 & = & 12 + 3 \\ 6y_G + 6 & = & 4 + 24 \end{array} \right.$$

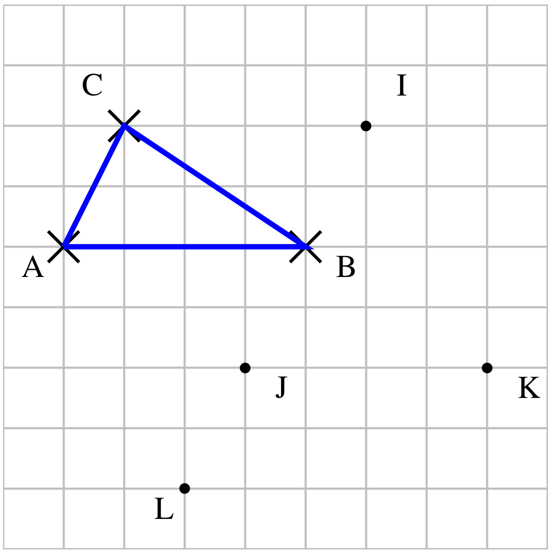
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6x_G & = & 27 \\ 6y_G & = & 22 \end{array} \right.$$

d'ou :

$$\boxed{G\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right)}.$$

On retrouve bien les memes coordonnees que precedemment.

## Correction de l'exercice 11




**1.** Construire les points I, J, K et L définis par :

**1. a.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ;

**1. b.** $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ;

**1. c.** $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ;

**1. d.** $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$ ;

**2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.**

**Corrigé**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}\\ &= \left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}\right) + \left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\\ \overrightarrow{JK} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}}$$

**3. Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.**

**Corrigé**

Par construction, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc le quadrilatère ABIC est un parallélogramme et de ce fait, $\boxed{\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}}$.

On a montré que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JK}$, soit $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JK}$ et donc le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.

## Correction de l'exercice 12

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $D(-2\ ;\ 4)$, $E(-1\ ;\ 1)$ et $F(5\ ;\ 4)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.

2. On considère les points R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{DR} = 4\,\overrightarrow{DE} \quad , \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} \quad , \quad \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$$

Les coordonnées des points R, S et T sont :

$$\boxed{R(2\ ;\ -8)},\ \boxed{S(1,5\ ;\ 4)} \text{ et } \boxed{T(1\ ;\ 2)}.$$

3. **Démontrer que les droites (ST) et (FR) sont parallèles**.

**Corrigé**

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0,5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$ donc de façon évidente $\boxed{\overrightarrow{FR} = 6\overrightarrow{ST}}$ ce qui montre la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{ST}$. Les droites (ST) et (FR) sont donc parallèles.

Montrer que les coordonnées du milieu K du segment [DR] sont $K(0\ ;\ -2)$.

On a :

$$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0,5\\-2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires car

$$\overrightarrow{TK} = 2\overrightarrow{ST}$$

et donc les points S, T et K sont alignés.

## Correction de l'exercice 13

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A(-1\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ -1)$, $C(6\ ;\ 3)$ et $D(0\ ;\ 2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. **Démontrer que ABCD est un parallélogramme**.

**Corrigé**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ ce qui montre que ABCD est un parallélogramme.

3. Construire le point E tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

**Corrigé**

4. Après calculs, on obtient ...

Le point E est de coordonnées $\boxed{E(4\ ;\ -5)}$.

**Corrigé**

5. On a $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}}$$

Le point B est donc le milieu du segment [EC] puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.