Math93.com

TD n°1 - Seconde
Bilan : Compléments

Les exercices précédés du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD. Les exercices dont l'intitulé est précédé du sigle (ES/L) ou S sont plus spécifiquement réservés aux filières de première associées.

Exercice 1. (ES/S) Quelques systèmes et Quelques fourberies

Résoudre les systèmes suivants :

1. (S_1) : $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$

2. (S_2) : $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

3. (S_3) : $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -3x-2y=-12 \end{cases}$

4. (S_4) : $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+y=1 \\ x+5y=-12 \end{cases}$

5. (S_5) : $\begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

6. (S_6) : $\begin{cases} x^2+3y=4 \\ x^2+6y=7 \end{cases}$

Réponses
$I_1(-1\,;\,2)$, $I_2\left(\dfrac{11}{4}\,;\,\dfrac{15}{8}\right)$, (S_3) *a une infinité de solutions,* (S_4) *n'a pas de solution,* $I_5\left(2\sqrt{2}+3\,;\,-\sqrt{2}-2\right)$, (S_6) *a deux solutions* $I_6(-1\,;\,1)$ *et* $I'_6(1\,;\,1)$

Exercice 2. (ES/S) Parabole et droites

1. Dresser le tableau de variations et construire dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par

$$f(x)=(x-1)^2-3$$

2. Déterminer l'équation de la droite (AB) avec $A(-3\,;\,5)$ et $B(-2\,;\,3)$.

3. Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées des points I et J, points d'intersection des deux courbes.

Réponses
$(AB)\ :\ y=-2x-1$, $I(-1\,;\,1)$ *et* $J(1\,;\,-3)$.

Exercice 3. (S) Équations et forme canonique

Factoriser les expression à l'aide de la forme canonique puis résoudre les équations.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2-4x-5=0$.
   Aide : montrer que $x^2-4x-5=(x-2)^2-9$ *puis factoriser l'expression en utilisant la troisième identité remarquable* A^2-B^2.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+10x+9=0$.
   Aide : montrer que $x^2+10x+9=(x+5)^2-16$ *puis factoriser l'expression en utilisant la troisième identité remarquable* A^2-B^2.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2-4x+48=0$.
   Aide : montrer que $-2x^2-4x+48=-2\left((x+1)^2-25\right)$ *puis ...*

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2-2x-2=0$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2-5x+2=0$.

Réponses
$S_1=\{-1\,;\,5\}\,;\,S_2=\{-9\,;\,-1\}\,;\,S_3=\{-6\,;\,4\}\,;\,S_4=\varnothing\,;\,S_5=\left\{\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\,;\,\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Exercice 4. (ES/L) Pourcentages

Propriété 1

Soit x un nombre strictement positif, $x \in \mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$.

1. Augmenter une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 + x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1+x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1+x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 - x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1-x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1-x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Définition 1

Soit une quantité qui évolue d'une valeur initiale v_i à une valeur finale v_f.

1. Le rapport $\dfrac{v_f - v_i}{v_i}$ s'appelle **taux d'évolution** ou **variation relative** de v_i à v_f.
2. Soit t le réel (positif ou négatif) tel que :

$$\boxed{\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100} = t\,\%}$$

On dit que t % est le **pourcentage d'évolution** ou **taux d'évolution** de v_i à v_f

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1+t\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1+t\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Propriété 2

On a pour v_f et v_i deux valeurs non nulles, en notant toujours k le coefficient multiplicateur :

$$\boxed{\frac{v_f - v_i}{v_i} = t\,\% \Longleftrightarrow \frac{v_f}{v_i} = 1 + t\,\% = k} \quad \boxed{k = 1 + t\,\%} \text{ et } \boxed{t\,\% = k - 1}$$

1. Un prix passe de 30 euros à 29,4 euros. Calculer son pourcentage d'évolution.
2. Un prix passe de 500 euros à 535 euros. Calculer son pourcentage d'évolution.
3. Après une hausse de 5%, le prix d'un article est de 78,75 euros. Calculer le prix avant la hausse.
4. Après une baisse de 15%, le prix d'un article est de 161,50 euros. Calculer le prix avant la baisse.
5. Après deux hausses successives de 5%, le prix d'un article est de 330,75 euros. Calculer le prix avant les deux hausses.
6. Après deux baisses successives de 13%, le prix d'un article est de 5 676,75 euros. Calculer le prix avant les deux baisses.
7. Après une hausse de 5% suivi d'une baisse de 8%, le prix d'un article est de 1 449 euros. Calculer le prix initial de l'article.
8. Après dix hausses successives de 2%, le prix d'un article est de 8 532,96 euros. Calculer le prix avant les dix hausses.
9. Le prix d'un articles est de 150 euros. Après deux hausses successives de x%, le prix final est de 162,24 euros. Déterminer x%.
10. Le prix d'un articles est de 2 500 euros. Après deux baisses successives de y%, le prix final est de 1 800,25 euros. Déterminer y%.

> **Réponses**
> *(1.) −2% ; (2.) +7% ; (3.) 75 euros ; (4.) 190 euros ; (5.) 300 euros ; (6.) 7 500 euros ; (7.) 1 500 euros ; (8.) 7 000 euros (9.) 4% (10.) 15%*

Exercice 5. (S) Trigonométrie

Exemple 1 (Mesure principale)

On cherche la mesure principale de $y = \dfrac{151\pi}{4}$ c'est à dire écrire y suivant sous la forme

$$x + 2k\pi \text{ où } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ x \in \left]-\pi\,;\,\pi\right] \end{cases}$$

On effectue alors la division euclidienne de 151 par 4.

$$151 = 4 \times 37 + 3$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} y = \frac{151\pi}{4} &= \frac{(4 \times 37 + 3)\pi}{4} \\ &= \frac{3\pi}{4} + 37\pi \\ &= \left(-\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + 38\pi \\ &= -\frac{\pi}{4} + 38\pi \end{aligned}$$

La mesure principale de $y = \dfrac{151\pi}{4}$ est donc $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. Écrire les radians y suivant sous la forme $x + 2k\pi$ où k est un entier relatif et x un réel de l'intervalle $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$.
Remarque : on dira que x est la **mesure principale** de y.

1. a. $y_1 = \dfrac{345\pi}{6}$; $y_2 = \dfrac{47\pi}{3}$; $y_3 = -\dfrac{80\pi}{3}$.

1. b. Déterminer les sinus et cosinus de y_1, y_2 et y_3.

2. Après avoir trouvé les mesures principales des angles associés, montrer que :

2. a. $\sin\left(\dfrac{74\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{74\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

2. b. $\sin\left(\dfrac{179\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{179\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2. c. $\sin\left(\dfrac{2\,503\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{2\,503\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3. Calculer les expressions suivantes :

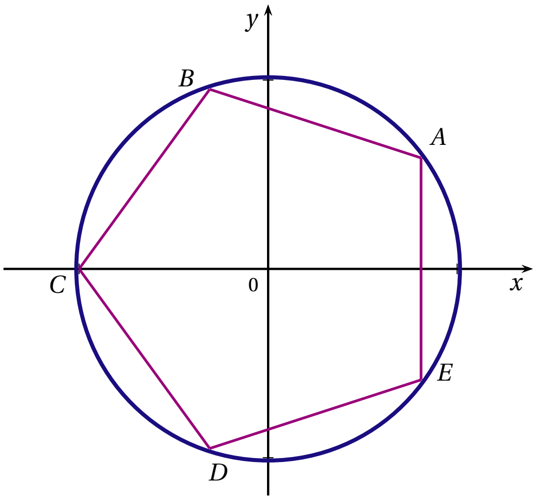
3. a. $E = \sin\left(\dfrac{159\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\dfrac{753\pi}{3}\right)$;

3. b. $F = 2\sin\left(\dfrac{426\pi}{4}\right) - 4\cos\left(\dfrac{89\pi}{4}\right)$;

Réponses
$x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$; $x_2 = -\dfrac{\pi}{3}$; $x_3 = -\dfrac{2\pi}{3}$; $E = 3$; $F = 2 - 2\sqrt{2}$

Exercice 6. (S) Trigonométrie

1. Calculer $E = \cos\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{6} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



2. a. Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, à quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

2. b. On donne $\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{3\pi}{5}$.

Exercice 7. (S) Trigonométrie

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$X^2 - X - \frac{3}{4} = 0$$

2. En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'équation :

$$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

Exercice 8. (S) Trigonométrie

1. Calculer :

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

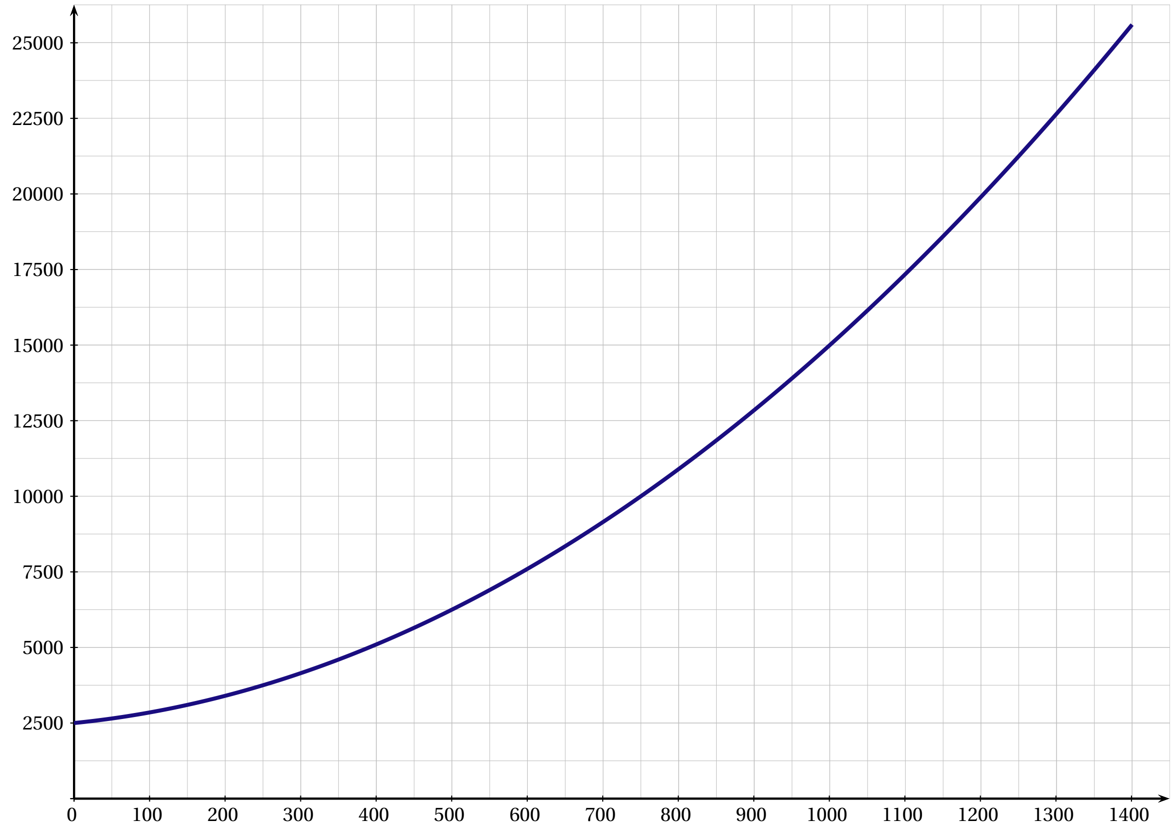
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$$

Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 9. (ES/S) Fonctions

Une entreprise fabrique une quantité x, comprise entre 0 et 1400, d'un certain article.
Le coût total de production f, exprimé en euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère d'origine O du graphique ci-dessous.



1.

1. a. Quel est le coût total de production de 500 articles ?

1. b. Quelle quantité maximale d'articles est-il possible de produire pour un coût total inférieur à 20 000 € ?

2. Chaque article est vendu au prix de 17 €. La recette occasionnée par la vente de x articles est notée $R(x)$.

2. a. Exprimer $R(x)$ en fonction x et représenter la fonction R sur le graphique précédent.

2. b. Déterminer graphiquement les quantités d'articles que l'on peut produire pour que le profit soit positif ou nul.

3. Le coût moyen g est donné sur l'intervalle $]0;1400]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

3. a. Sur le graphique, placer le point M d'abscisse 1000 situé sur la courbe $\mathscr{C}$, puis tracer la droite (OM).
Que représente le coefficient directeur de la droite (OM) ?

3. b. Estimer $g(1000)$.

3. c. Pour quelle quantité, le coût moyen est-il minimal ?

4. Du fait de la concurrence, l'entreprise doit baisser son prix de vente.

4. a. Quel est le prix de vente minimal de chaque article, si cette entreprise ne veut pas travailler à perte ?

4. b. À quel taux de remise par rapport au prix de vente initial correspondrait ce nouveau prix de vente ?

Exercice 10. (ES/S) Fonctions

Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x+2}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.
2. En déduire la position relative de la droite (d) d'équation $y = 2x-1$ avec $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.

Réponses
$a = 2$; $b = -1$ *et* $c = -3$

Exercice 11. (ES/S) Fonctions

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2+5x+1}{x-2}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
2. En déduire la position relative de la droite (d) d'équation $y = -2x+1$ avec $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.

Réponses
$a = -2$; $b = 1$ *et* $c = 1$

Exercice 12. (ES/S) Fonctions

On considère la fonction f, définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -8x^3-2x^2+25x-6$$

1. Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$ on a :

$$f(x) = (2x-3)(-4x^2-7x+2)$$

2. Á l'aide du cours ou d'une factorisation canonique, factoriser le facteur $(-4x^2-7x+2)$.
   En déduire une factorisation de f en produit de facteurs de degré 1.
3. Étudier le signe de f sur $[0; +\infty[$ et résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
4. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Réponses
$f(x) = (2x-3)(x+2)(1-4x)$; $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Exercice 13. (ES/S) Fonctions

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4x^3-2x^2-4x+2}{x^4+2x^2+1}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{(2-4x)(1-x^2)}{x^4+2x^2+1}$$

3. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$ et résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Réponses
$S = \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[$

Exercice 14. (S) Équations de cercles

Définition 2

On se place dans un repère orthonormé.
Le cercle $\mathscr{C}(A\,;\,R)$ de centre $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et de rayon R est l'ensemble des point M du plan tels que : $AM = R$.
Les coordonnées des points $M\left(x\,;\,y\right)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$ vérifient donc l'égalité :

$$AM^2 = R^2 \Longleftrightarrow (x - x_A)^2 + \left(y - y_A\right)^2 = R^2$$

En effectuant deux factorisations canoniques, déterminer les cordonnées du centre et le rayon des cercles d'équations suivantes :

1. Le cercle $\mathscr{C}_1$ d'équation : $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 23$.
2. Le cercle $\mathscr{C}_2$ d'équation : $x^2 - 10x + y^2 + 10y + 1 = 0$.
3. Le cercle $\mathscr{C}_3$ d'équation : $x^2 + y(y - 2) = 0$.
4. Le cercle $\mathscr{C}_4$ d'équation : $x^2 - 4x + y^2 = 5$.
5. Le cercle $\mathscr{C}_5$ d'équation : $x^2 - x + \dfrac{144y^2 + 96y + 43}{144} = 0$.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ avec la droite (d) d'équation $y = x$.

Réponses

$\mathscr{C}_1\Big(A(3\,;\,2)\,;\,R = 6\Big)\,;\mathscr{C}_2\Big(A(5\,;\,-5)\,;\,R = 7\Big)\,;\mathscr{C}_3\Big(A(0\,;\,1)\,;\,R = 1\Big)\,;\mathscr{C}_4\left(A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)\,;\,R = \dfrac{1}{4}\right);$

(6.) $\mathscr{C}_1 \cap (d) = \left\{B\left(\dfrac{5-\sqrt{71}}{2}\,;\,\dfrac{5-\sqrt{71}}{2}\right)\,;\,C\left(\dfrac{5+\sqrt{71}}{2}\,;\,\dfrac{5+\sqrt{71}}{2}\right)\right\}$