Math93.com

TD n°1 - Seconde
Bilan de l'année : Fonctions

Les exercices précédés du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Exercice 1. Fonctions

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+1}$. La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est l'hyperbole C_f.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.

3.

3. a. Déterminer le réel B tel que $f(x) = -2 + \dfrac{B}{x+1}$.

3. b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.

3. c. En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x \in [-1201; -1001]$.

4. Soit g la fonction affine telle que $g(-8) = -6$ et $g(6) = 1$.

4. a. Déterminer l'expression de g en fonction de x.

4. b. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.

5.

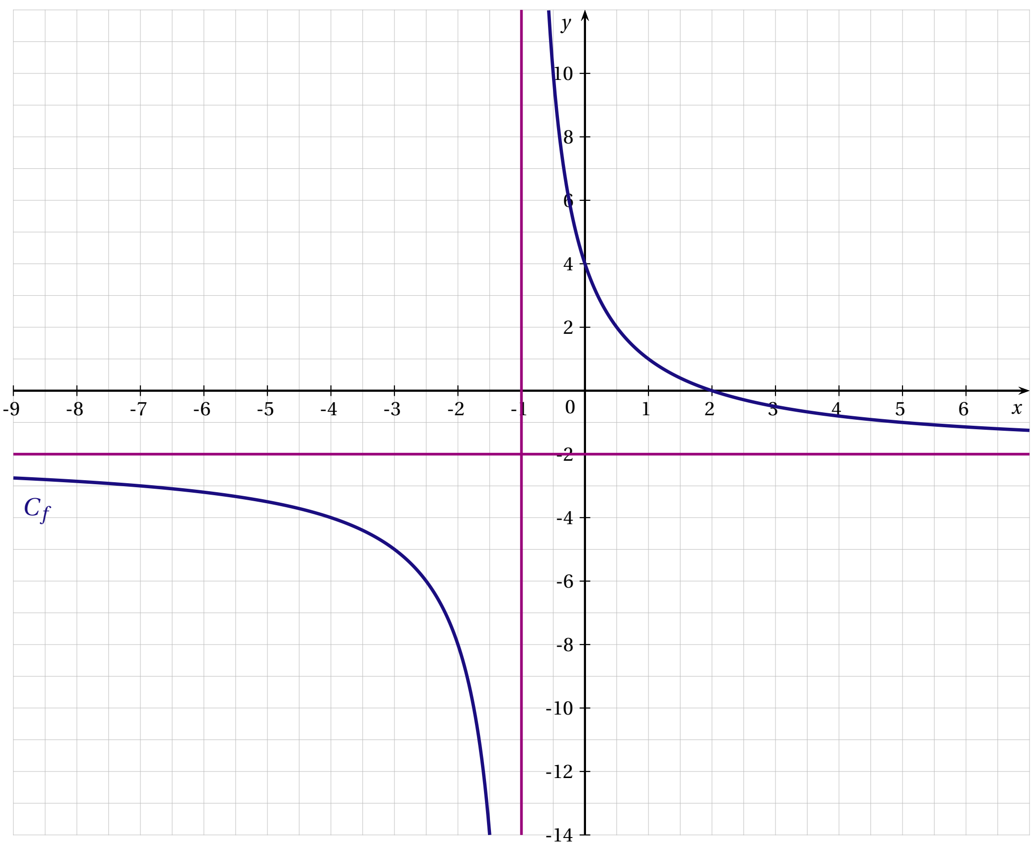
5. a. Montrer que pour tout réel $x \neq -1$:

$$f(x) - g(x) = \frac{(3-x)(x+4)}{2x+2}$$

5. b. Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes C_f et D.

5. c. Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

ANNEXE



Exercice 2. Fonctions

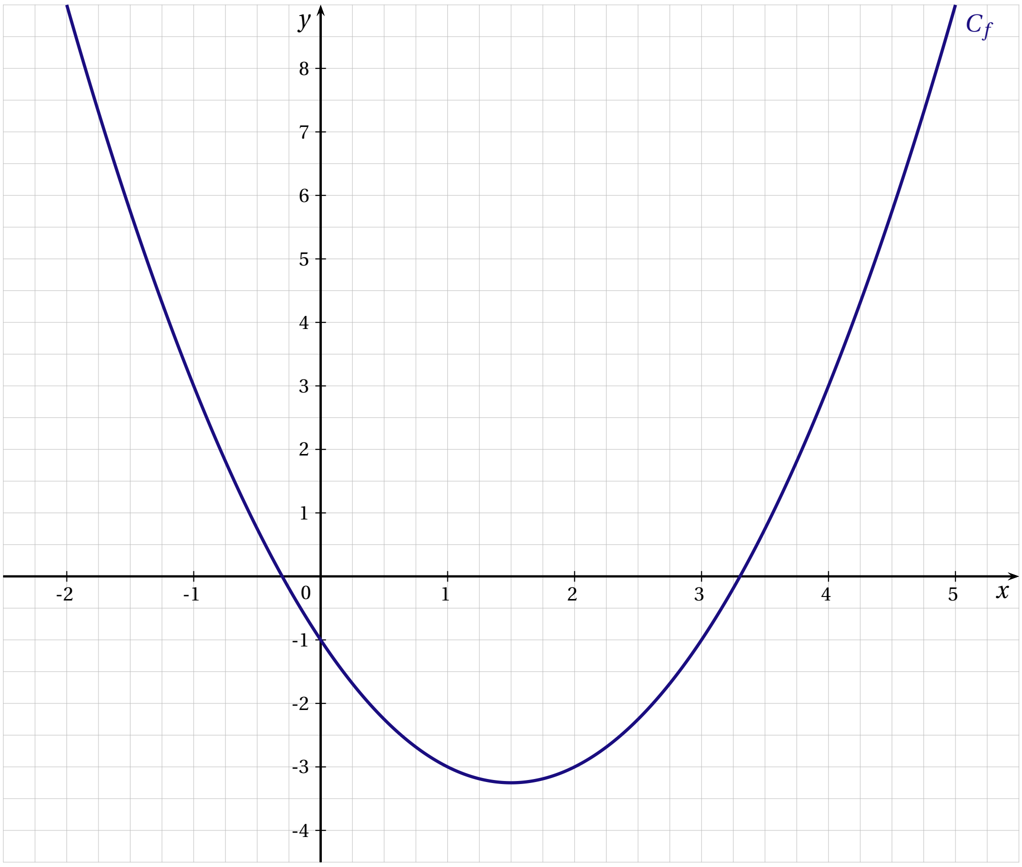
PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer $f(-1)$. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 3$
3. Si m est un réel appartenant à l'intervalle $[0;4]$ peut-on affirmer que $-1 \leqslant f(m) \leqslant 3$?

PARTIE B

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 5$ et $g(5) = -4$.
   1. a. Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
   1. b. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2.
   2. a. Montrer que $f(x) - g(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}$.
   2. b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Exercice 3. (c) Fonction polynôme du second degré

Soit f la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x+1)(x-3) - \left(\frac{2}{3} - x\right)(3-x)$$

1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - 5$$

2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}$$

3. Donner le tableau de variation de la fonction f en appliquant le cours.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 4. Fonction polynôme du second degré

Soit g la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)(2x-1) - (3-x)(1+x)$$

1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$g(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} - 4$$

2. Montrer que pour tout réel x on a :

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{12}$$

3. Donner le tableau de variation de la fonction f en appliquant le cours.

4. Montrer que pour tout réel x :

$$g(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x+4)$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \leq 0$.

Exercice 5. (c) Étude de Fonctions

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$ et dont la courbe représentative notée $\mathscr{C}_g$ est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$$g(x) = \frac{4-x^2}{2x+10}$$

1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g.

2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Partie B

Soit h la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\begin{cases} h(3) = 0 \\ h(-1) = 2 \end{cases}$.

1. Donner une expression de $h(x)$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction h ?

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ représentative de la fonction h dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$:

$$h(x) - g(x) = \frac{11-2x}{2x+10}$$

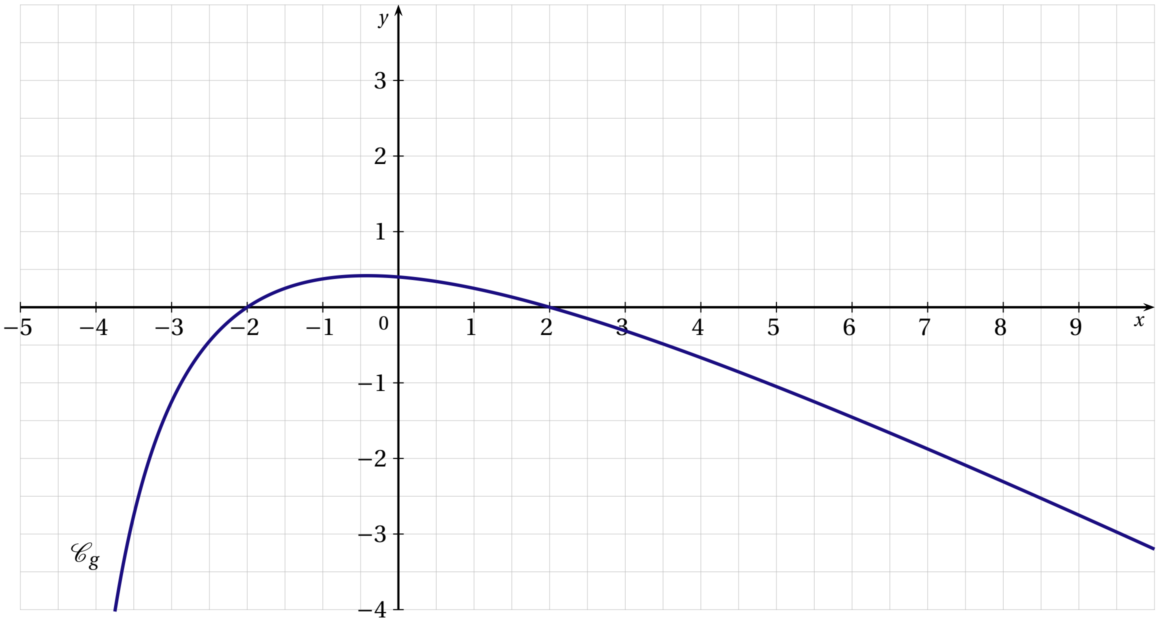
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite $\mathscr{C}_h$ avec la courbe $\mathscr{C}_g$

3.

3. a. Étudier le signe de $\dfrac{11-2x}{2x+10}$ sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$, à l'aide d'un tableau.

3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $h(x) \geqslant g(x)$.

3. c. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$.



Exercice 6. Fonction

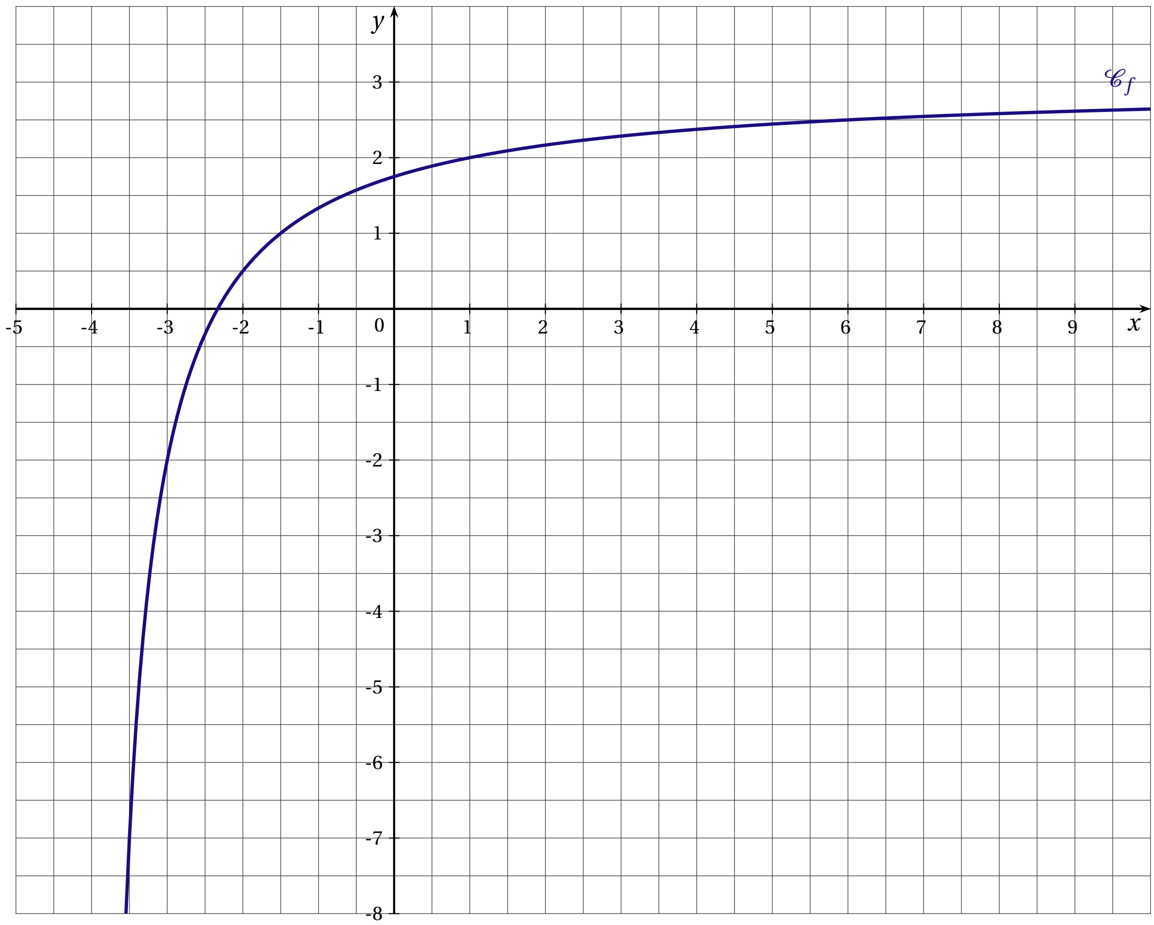
Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+4}$.

1. **1. a.** Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $]-4;+\infty[$, $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x+4}$.

   1. b. Étudier les variations de la fonction f.

2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = x - 3,5$.
   On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$, tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le même repère.



4.

   4. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-4;+\infty[$ on a :

$$g(x) - f(x) = \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{361}{16}}{x+4}$$

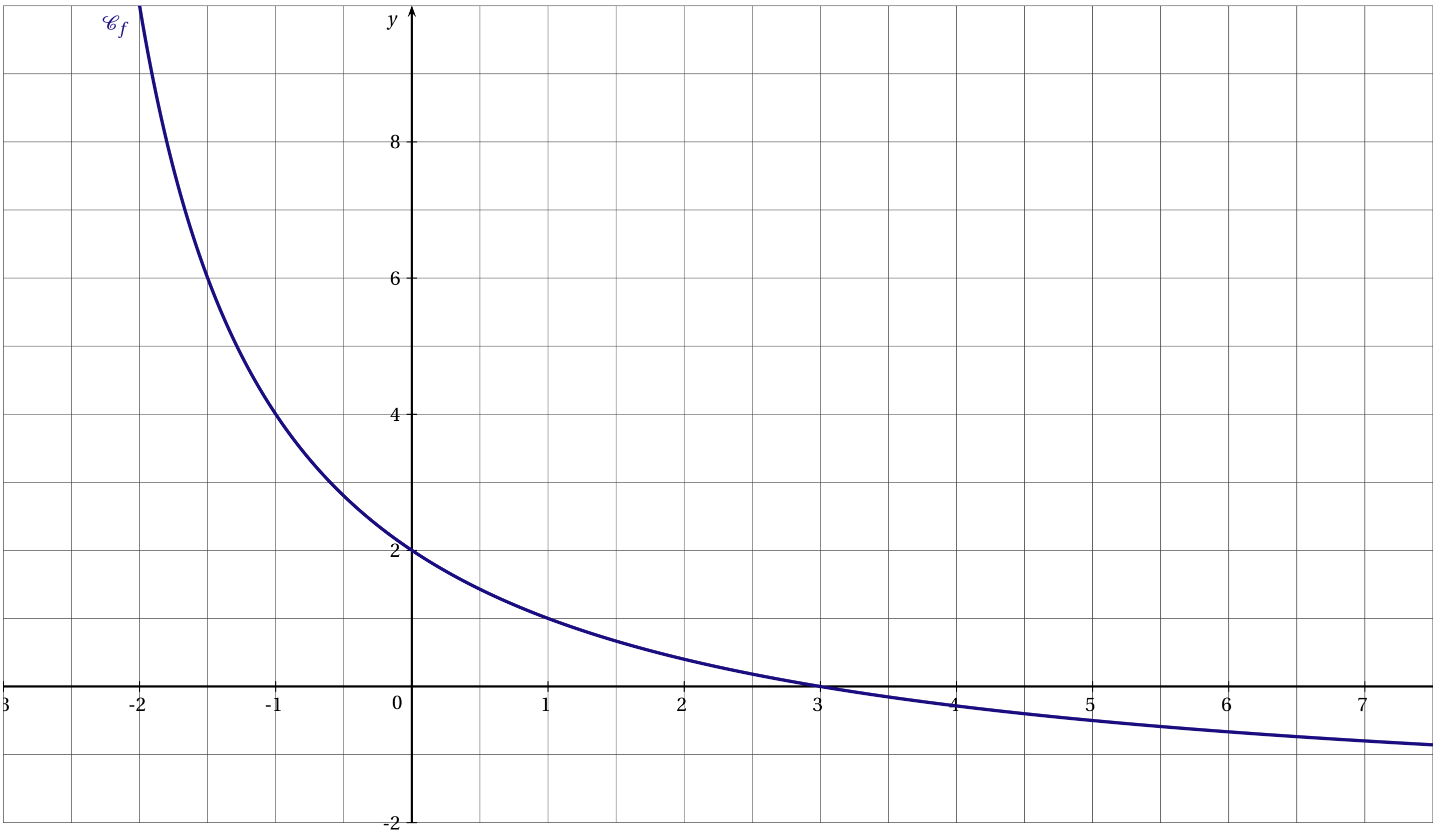
   4. b. Étudier le signe de $g(x) - f(x)$.
   En déduire les positions relatives des courbes C_f et D.

Exercice 7. Fonction

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6-2x}{x+3}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

3. **3. a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-3;+\infty[$ on a

$$f(x) - x = \frac{\frac{49}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{x+3}$$

3. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite D d'équation $y = x$.

Exercice 8. Fonction cube

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 12x - 2$.
Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le repère orthogonal donné en annexe.

1. Soit g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 2$.
Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.

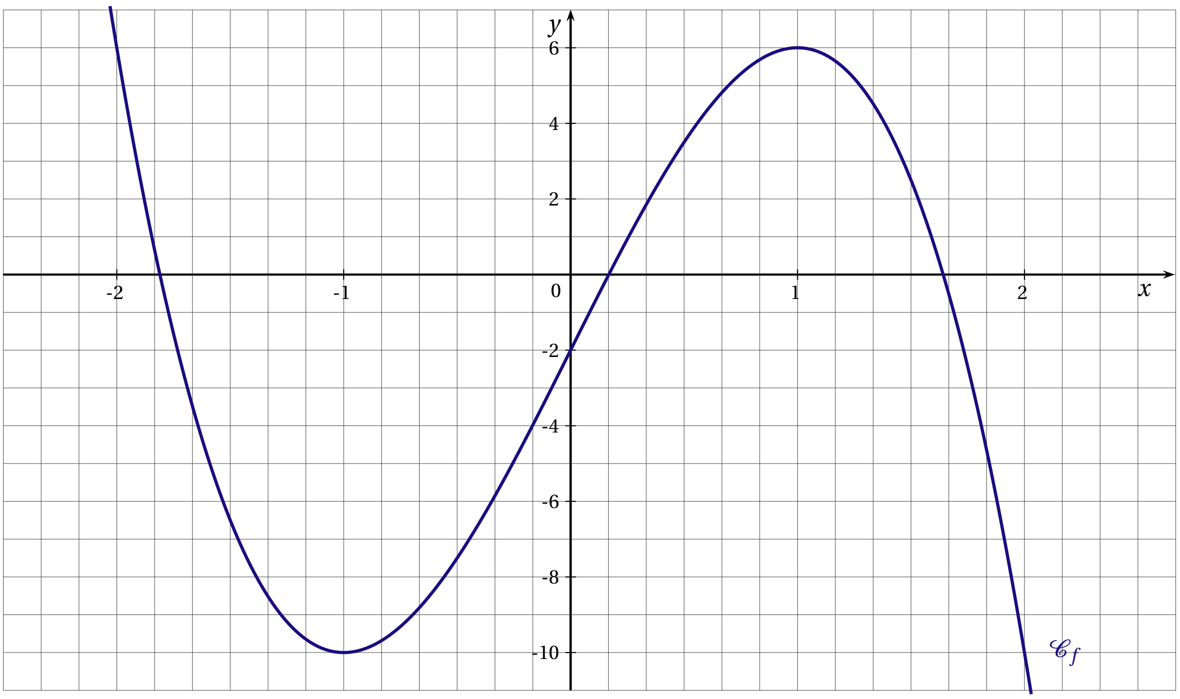
2. **2. a.** Factoriser $f(x) - g(x)$.

2. b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

2. c. En déduire les positions relatives des courbes C_f et D_g.

2. d. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et D_g.

ANNEXE



Exercice 9. Fonction cube

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 28x + 2$. Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le repère orthogonal donné en annexe.

1. Soit g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - 3x$.
Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.

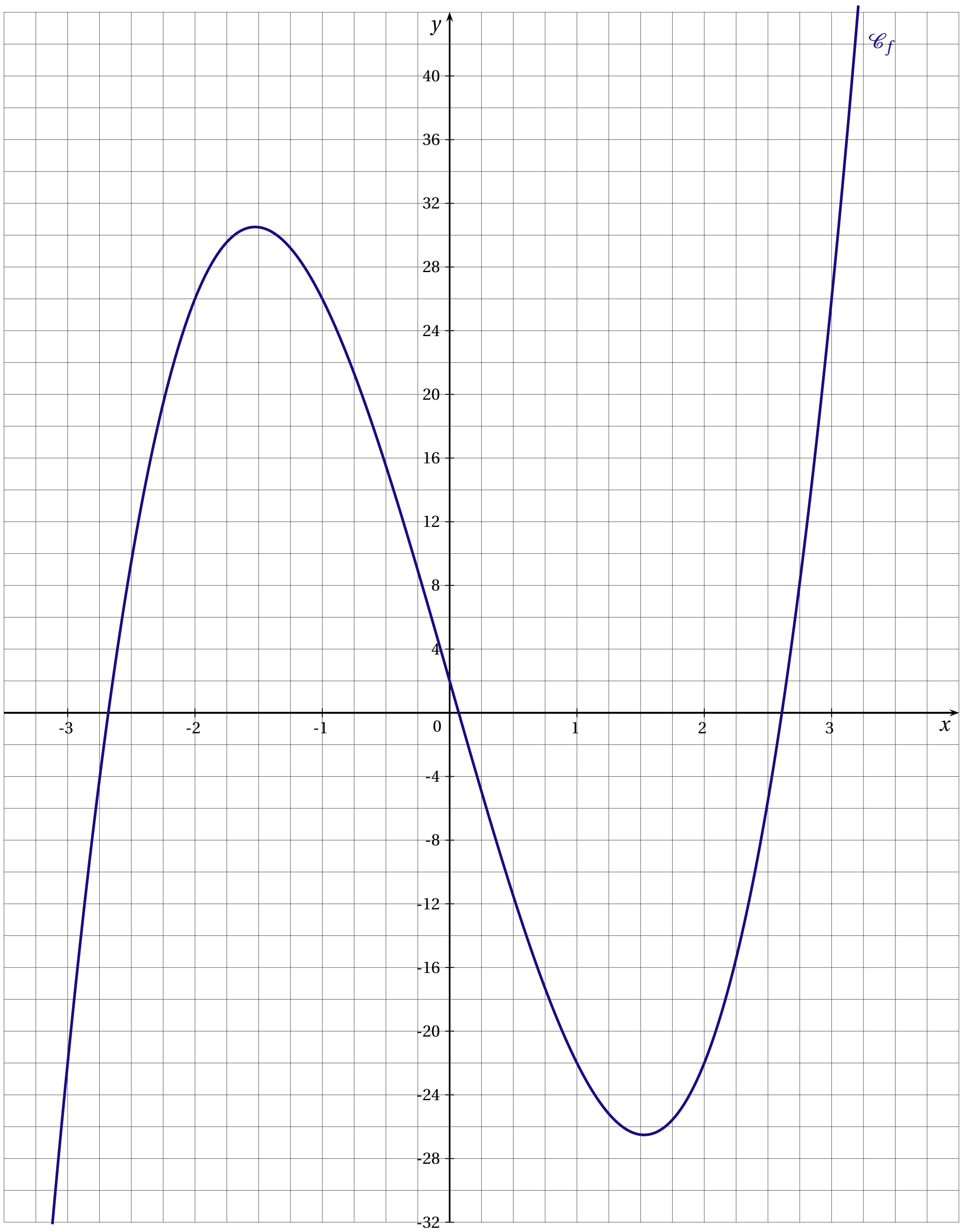
2. **2. a.** Factoriser $f(x) - g(x)$.

2. b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

2. c. En déduire les positions relatives des courbes C_f et D_g.

2. d. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et D_g.

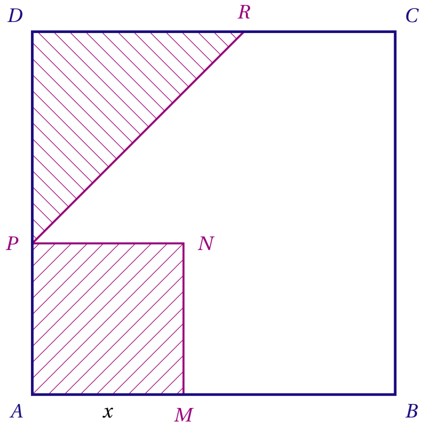
ANNEXE



Exercice 10. Fonction et aire

PARTIE A

$ABCD$ est un carré de côté 12 cm. M étant un point du segment $[AB]$, on construit le carré $AMNP$ et le triangle rectangle isocèle PRD comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On pose $x = AM$ avec $x \in [0;12]$

1. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle PRD.

2. On note $f(x)$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée.

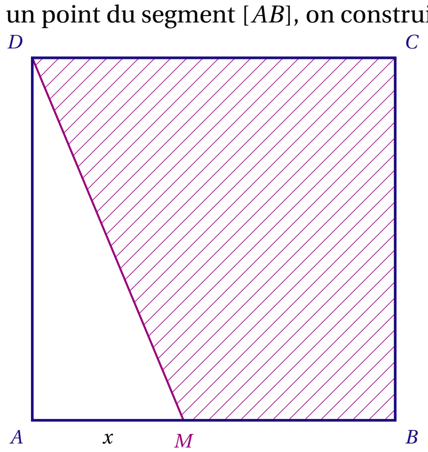
2. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;12]$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 12x + 72$.

2. b. Donner, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f.
En déduire la valeur minimale de l'aire de la partie hachurée.

3. Déterminer les positions éventuelles du point M pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à la moitié de l'aire du carré $ABCD$.

PARTIE B

$ABCD$ est un carré de côté 12 cm. M étant un point du segment $[AB]$, on construit le trapèze $DMBC$.



On pose $x = AM$ avec $x \in [0;12]$

1. On note $g(x)$ l'aire en cm^2 du trapèze $DMBC$.
Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;12]$, $g(x) = 144 - 6x$.

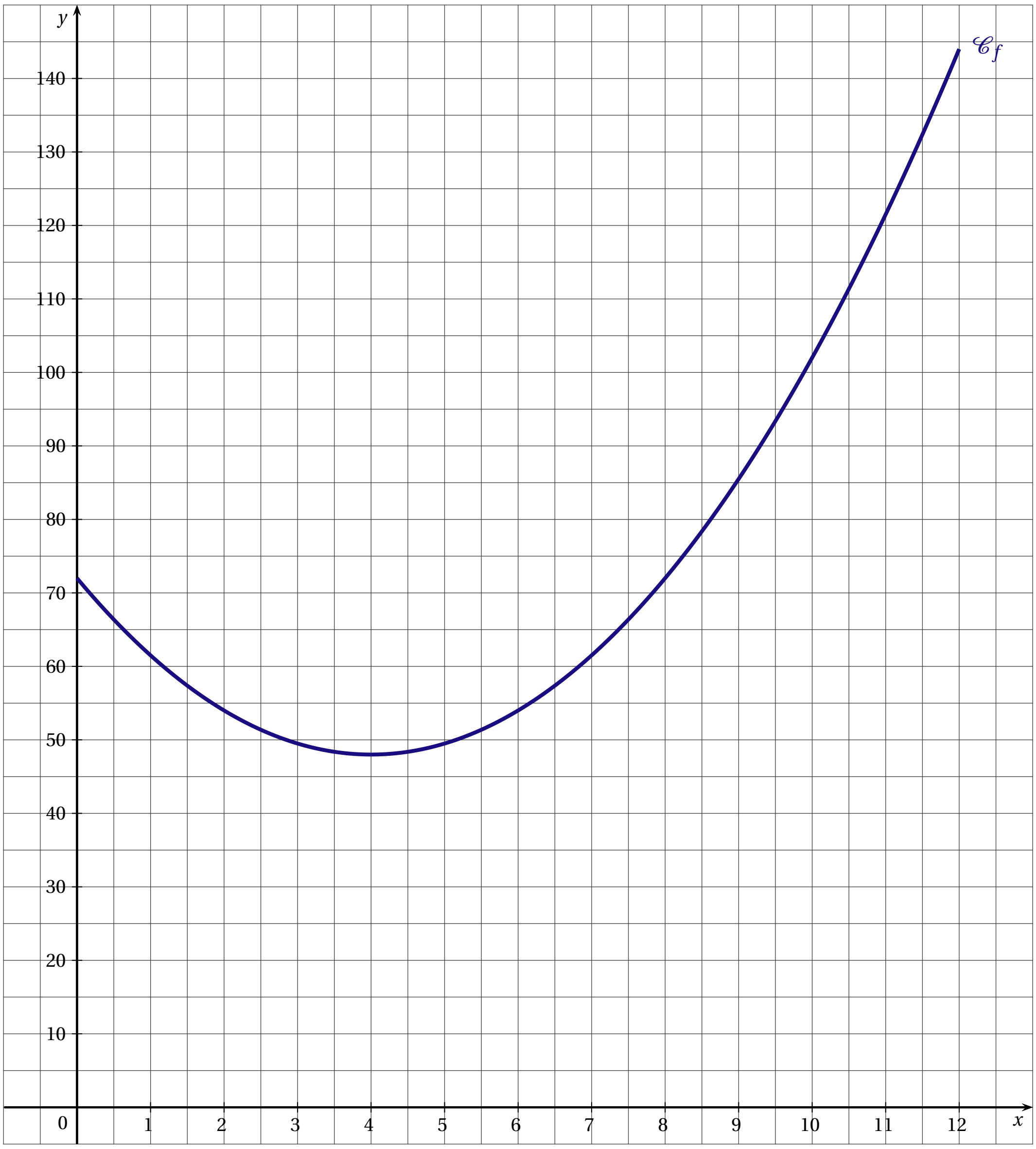
2. On donne en annexe la représentation graphique de la fonction f définie dans la partie A.

2. a. Tracer sur la figure donnée la représentation graphique de la fonction g.

2. b. Démontrer que, pour tout $x \in [0;12]$, $f(x) - g(x) = \dfrac{3}{2} \times \left[(x-2)^2 - 52\right]$.

2. c. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

ANNEXE



y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
$\mathscr{C}_f$

Correction

Correction de l'exercice 4

Soit h la fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par :

$$h(x) = (x-3)(2x+1) - (3-x)\left(\frac{2}{3} - x\right)$$

1. **Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - 5$.**

2. **Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}$.**

3. **Donner le tableau de variation de la fonction h en appliquant le cours.**

   La fonction h est une fonction polynôme qui s'exprime sous forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\begin{cases} a = 1 \\ \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{49}{9} \end{cases}$.

   Puisque le coefficient $a = 1$ est positif, on a :

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{2}{3}$	$+\infty$
Variations de h	$\searrow$	$\beta = -\frac{49}{9}$	$\nearrow$

4. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) \leq 0$.**
   Pour cela on va factoriser l'expression de h.

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} + \frac{7}{3}\right) \\ h(x) &= (x-3)\left(x + \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

   Il reste alors à étudier le signe de chaque facteur et à faire un tableau de signes.

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \iff x = 3 \\ x - 3 < 0 \iff x < 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \frac{5}{3} = 0 \iff x = -\frac{5}{3} \\ x + \frac{5}{3} < 0 \iff x < -\frac{5}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + \frac{5}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-3)\left(x+\frac{5}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>Conclusion</u> : $\boxed{h(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{5}{3} ; 3\right]}$.

Correction de l'exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$ *et dont la courbe représentative notée* $\mathscr{C}_g$ *est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé :* $g(x)=\dfrac{4-x^2}{2x+10}$.

1. **Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g.**

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Variations de g	‖	↗	0	↗	0.4	↘	0	↘	

2. **Résoudre algébriquement l'équation $g(x)=0$ et interpréter ce résultat graphiquement.**
   Notons que la valeur interdite de la fonction g est (-5) donc sur son intervalle de définition $]-5\,;\,+\infty[$ on a :

$$g(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=0 \\ \text{et } \ x\neq -5 \end{cases} \quad 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ \text{et } \ x\neq -5 \end{cases}$$
$$g(x)=0 \Longleftrightarrow x=2 \ \text{ ou } \ x=-2$$

   Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses sont 2 et (-2).

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f(3)=0$ *et* $f(-1)=2$.

1. **Donner une expression de $f(x)$.**
   la fonction f est affine donc de la forme $f(x)=mx+p$ avec :

$$m=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{-2}{5}=-0,5$$

   On obtient facilement : $\underline{f(x)=-0,5x+1,5}$.

2. **Quel est le sens de variation de la fonction f ?**
   Le coefficient directeur $m=-0,5$ étant négatif, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.**

Partie C

1. **Vérifier que sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{11-2x}{2x+10}$.**
   Pour tout réel x de $]-5\,;\,+\infty[$, on a $2x+10\neq -5$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= -0,5x+1,5-\frac{4-x^2}{2x+10} \\ &= \frac{(-0,5x+1,5)(2x+10)-4+x^2}{2x+10} \\ f(x)-g(x) &= \frac{11-2x}{2x+10} \end{aligned}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite $\mathscr{C}_f$ avec la courbe $\mathscr{C}_g$

Les abscisses des point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{11-2x}{2x+10} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 11-2x = 0 \\ \text{ et } \ x \neq -5 \end{cases} \\ &\iff \underline{x = 5,5} \end{aligned}$$

Or on a :

$$g(5,5) = f(5,5) = -0,5 \times 5,5 + 1,5 = -1,25 = -\frac{5}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{C}_f$ avec la courbe $\mathscr{C}_g$ sont donc $\left(5,5\,;\ f(5,5)\right)$ soit $\left(5,5\,;\ -\frac{5}{4}\right)$.

3.

3. a. Étudier le signe de $\dfrac{11-2x}{2x+10}$ sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$, à l'aide d'un tableau.

$$\begin{cases} 11-2x = 0 \iff x = \dfrac{11}{2} \\ 11-2x < 0 \iff x > \dfrac{11}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+10 = 0 \iff x = -5 \\ 2x+10 < 0 \iff x < -5 \end{cases}$$

x	-5		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
Signe de $11-2x$	||	$+$	0	$-$	
Signe de $2x+10$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{11-2x}{2x+10}$	||	$+$	0	$-$	

L'expression $\dfrac{11-2x}{2x+10}$ est donc positive (ou nulle) sur l'intervalle $\left]-5\,;\ \frac{11}{2}\right]$ et négative (ou nulle) sur l'intervalle $\left[\frac{11}{2}\,;\ +\infty\right[$.

3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

$$f(x) \geqslant g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0 \iff \frac{11-2x}{2x+10} \geq 0$$

Donc d'après l'étude menée lors de la question **3.a**.

$$\boxed{S = \left]-5;\ \frac{11}{2}\right]}$$

3. c. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left]-5;\ \frac{11}{2}\right]$ et au-dessous sinon.