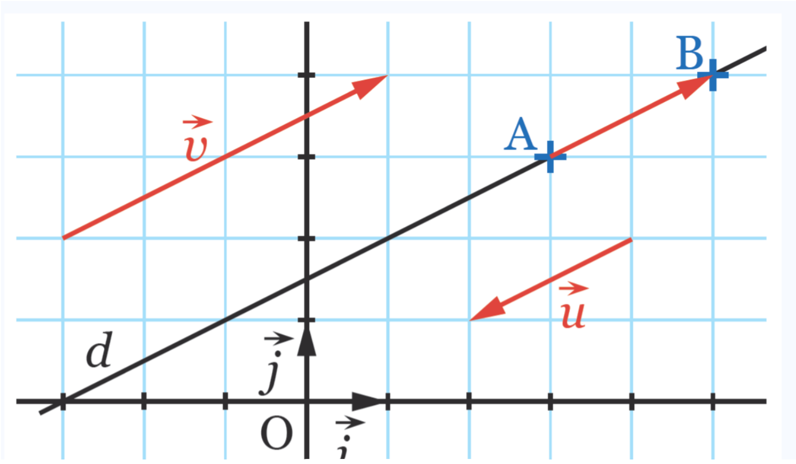
Math93.com

TD 1 - Seconde
Droites et systèmes

On se place dans un repère du plan $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie I. Droites et vecteurs directeurs

Exercice 1.



1. Lire les coordonnées des points A et B.

2. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$.

3. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

4. En déduire 3 vecteurs directeurs de la droite (d).

Exercice 2. (c)

Soient trois points $A(1\,;5)$, $B(-3\,;2)$ et $C(2\,;-1)$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (BC).

2. Détailler la construction de la parallèle à (BC) passant par A.

Partie II. Équation réduite d'une droite

Exercice 3. Par lecture graphique

Méthode

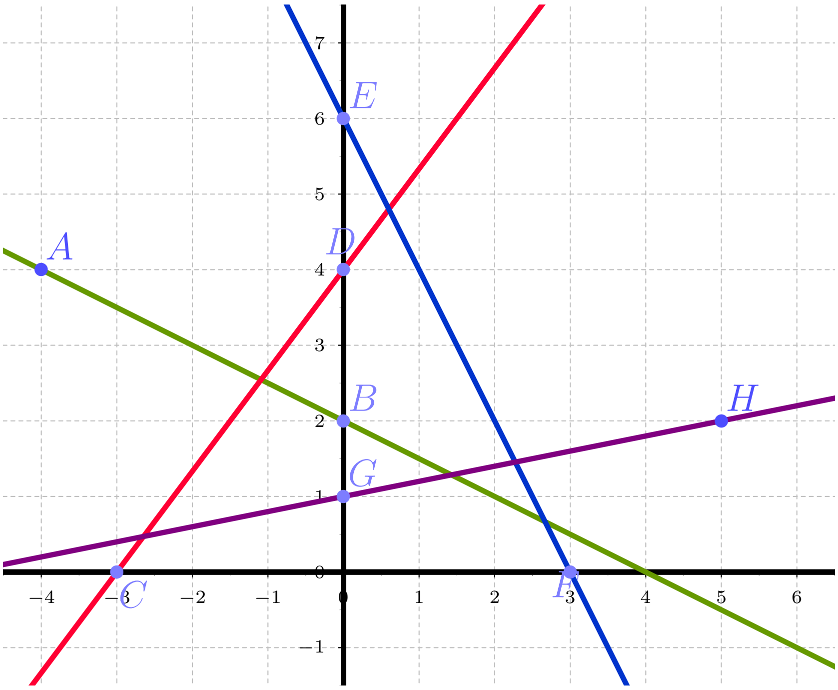
L'équation réduite d'une droite est de la forme :

$$y = mx + p$$

- On détermine m le coefficient directeur de la droite (AB) par lecture graphique (on avance de 1 ...) ou en utilisant les coordonnées de 2 points de la droite :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- Il reste ensuite à déterminer p : lisant l'ordonnée à l'origine sur le graphique. C'est dans ce cas possible, ce ne sera pas toujours le cas, il faudra parfois utiliser les coordonnées d'un des deux points pour calculer l'ordonnée à l'origine (comme dans l'exercice suivant).



Par lecture graphique, déterminer les équations réduites des droites (AB), (CD), (EF) et (GH).

Exercice 4. A partir de l'équation réduite

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite (d) dont l'équation réduite est :

$$y = 2x + 1$$

2. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite (d') dont l'équation réduite est :

$$y = -2x + 5$$

3. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite (d_1) dont l'équation réduite est :

$$y = 2 - 4x$$

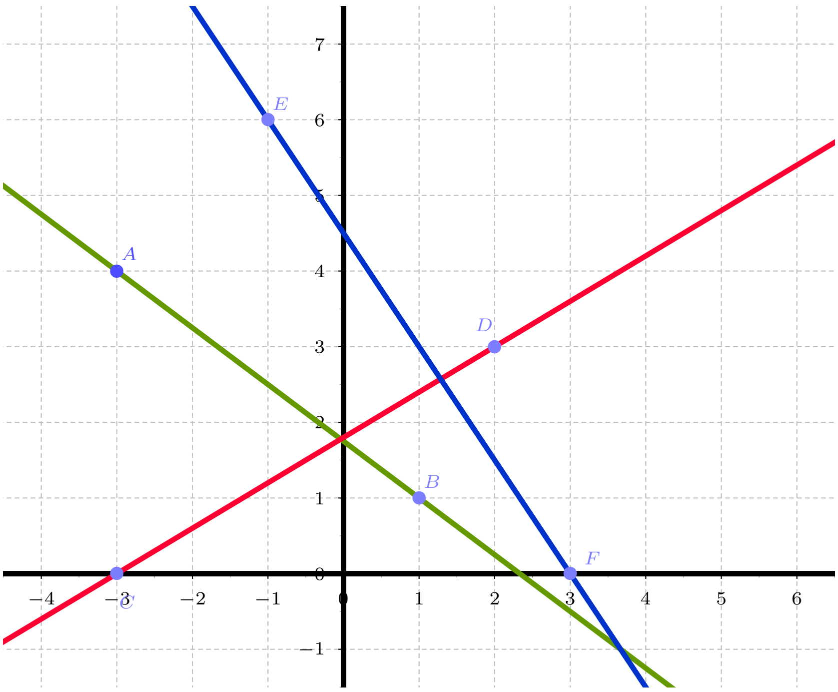
Exercice 5. Par le calcul

Méthode

L'équation réduite d'une droite est de la forme :

$$y = mx + p$$

- On détermine m le coefficient directeur de la droite (AB) en utilisant les coordonnées de 2 points de la droite :
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
- Il reste ensuite à déterminer p en utilisant les coordonnées d'un des deux points.



Déterminer les équations réduites des droites (AB), (CD) et (EF).

Exercice 6. A partir d'un point et d'un vecteur directeur

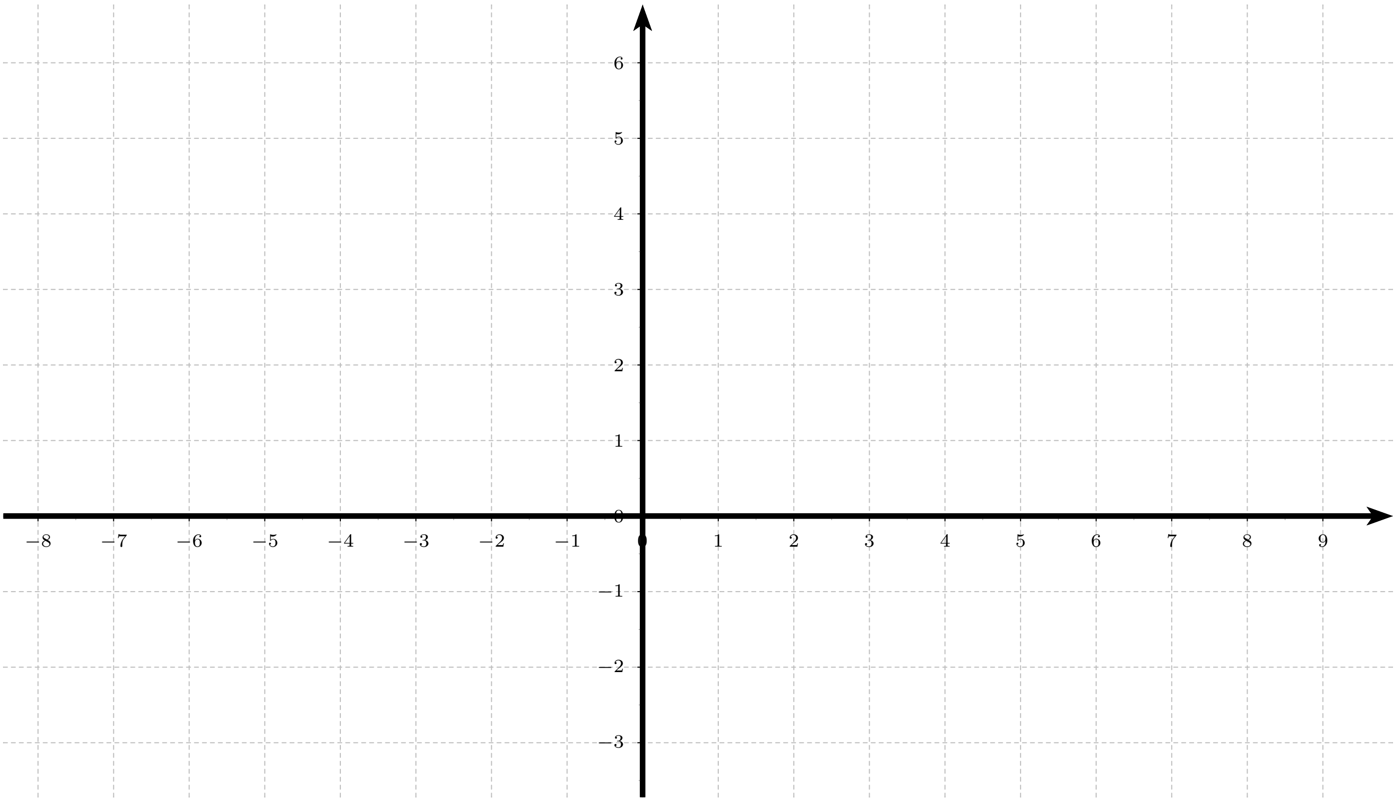
1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point $A(-1\ ;\ -4)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d') passant par le point $B(2\ ;\ -3)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

3. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_1) passant par le point $C(3\ ;\ 0)$ et parallèle à la droite (d).

4. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_2) passant par le point $C(3\ ;\ 0)$ et parallèle à la droite (d').

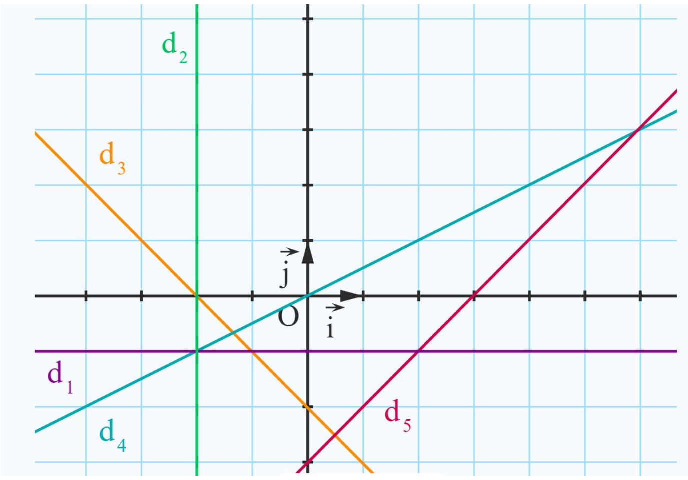
5. Tracer ces droites dans un même repère du plan.



Partie III. Équations cartésiennes d'une droite

Exercice 7. Par lecture graphique

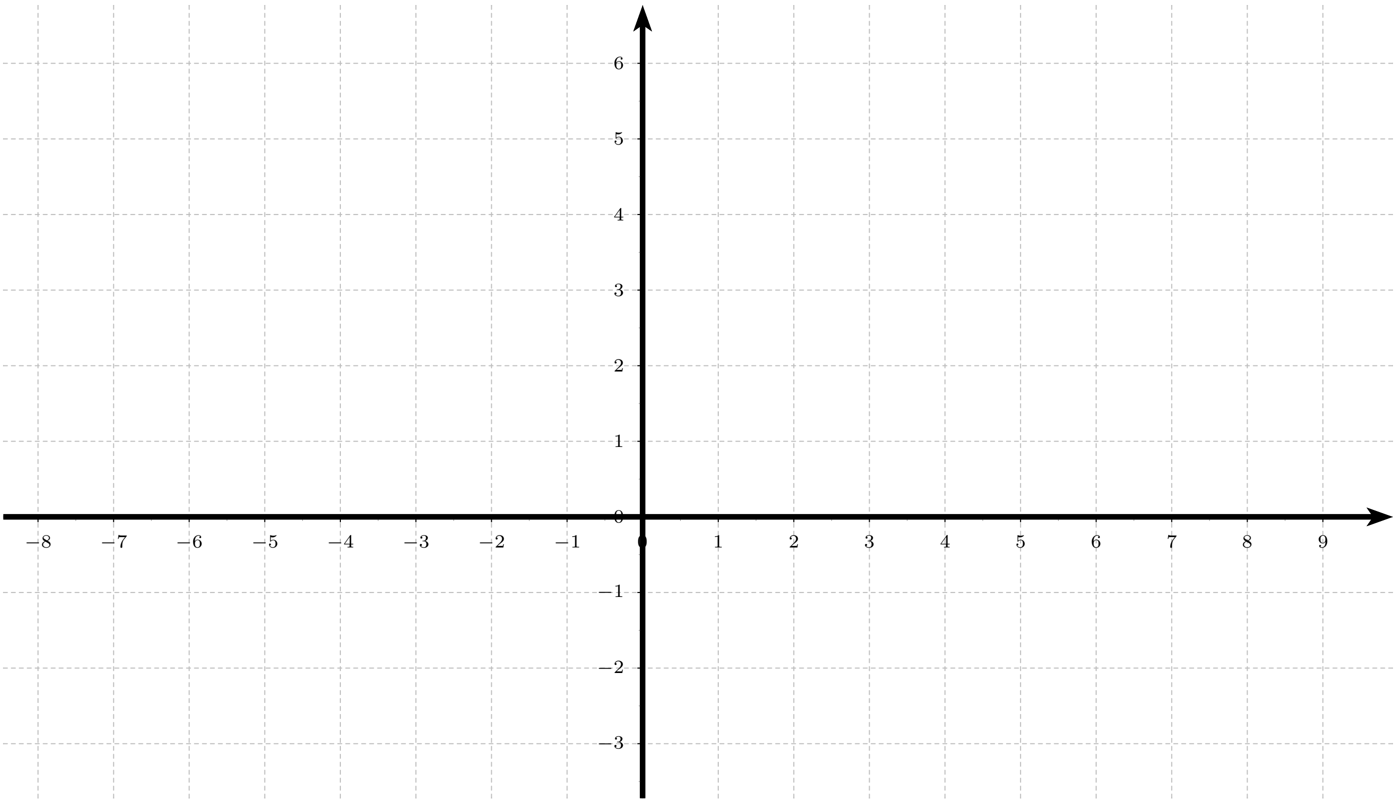
Par lecture graphique, déterminer une équation cartésienne pour chacune des droites représentées dans le repère.



Exercice 8. Représentation graphique

Représenter dans un repère chacune des droites suivantes. Chaque droite passe par un point A donné et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

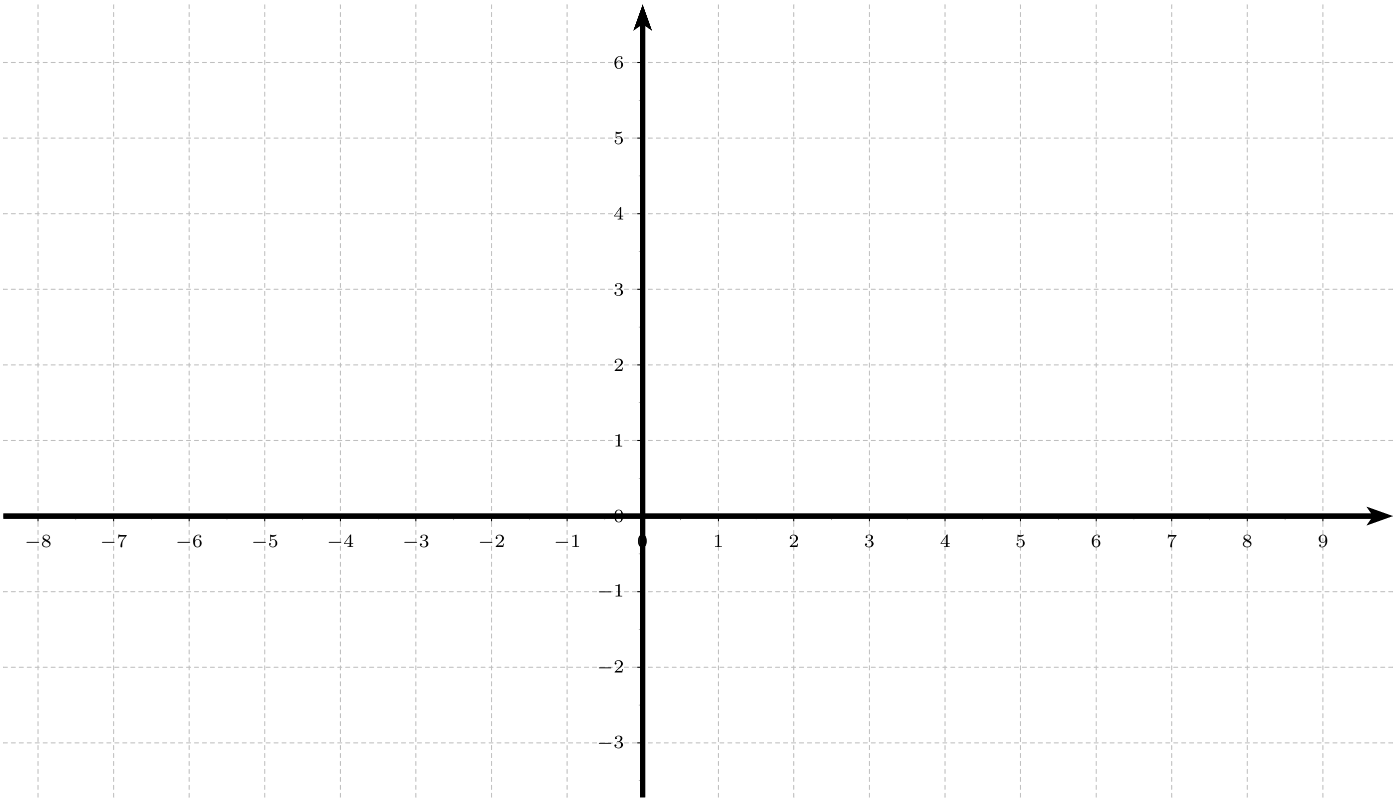
1. Droite d_1 : point $A_1(1\ ;\ 1)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(-1\ ;\ 3)$
2. Droite d_2 : point $A_2(-2\ ;\ 1)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(5\ ;\ 1)$
3. Droite d_3 : point $A_3(0\ ;\ 3)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u_3}(3\ ;\ 0)$
4. Droite d_4 : point $A_4(-4\ ;\ 0)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u_4}(0\ ;\ 5)$



Exercice 9. A partir de l'équation cartésienne

1. Représenter dans le repère chacune des droites suivantes, dont on donne une équation cartésienne.

2. Déterminer un point et un vecteur directeur de chacune des droites.



- $d_1 : x + y + 1 = 0$
- $d_2 : 2x - y - 2 = 0$
- $d_3 : -x + 2y + 3 = 0$
- $d_4 : 3x - 2y + 3 = 0$
- $d_5 : 2x + 3y - 4 = 0$

Exercice 10. Un point appartient à une droite ?

Dans chaque cas, déterminer en justifiant si le point A appartient à la droite (d).

1. On considère la droite d_1 d'équation $x + 4y - 20 = 0$ et le point $A_1(-4\ ;\ 9)$.

2. Soit la droite d_2 d'équation $2x - 3y - 1 = 0$ et le point $A_2(12\ ;\ 5)$.

3. Soit la droite d_3 d'équation $\dfrac{-2}{3}x + 2y - \dfrac{2}{3} = 0$ et le point $A_2\left(1\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$.

4. Soit la droite d_4 d'équation $\dfrac{-5}{4}x - \dfrac{1}{2}y - 1 = 0$ et le point $A_4\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right)$.

Exercice 11. Équation cartésienne par le calcul

Méthode

Une équation cartésienne d'une droite est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

- Si on a un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on peut directement trouver a et b :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

- Il reste à déterminer c en utilisant les coordonnées d'un des points.

Méthode

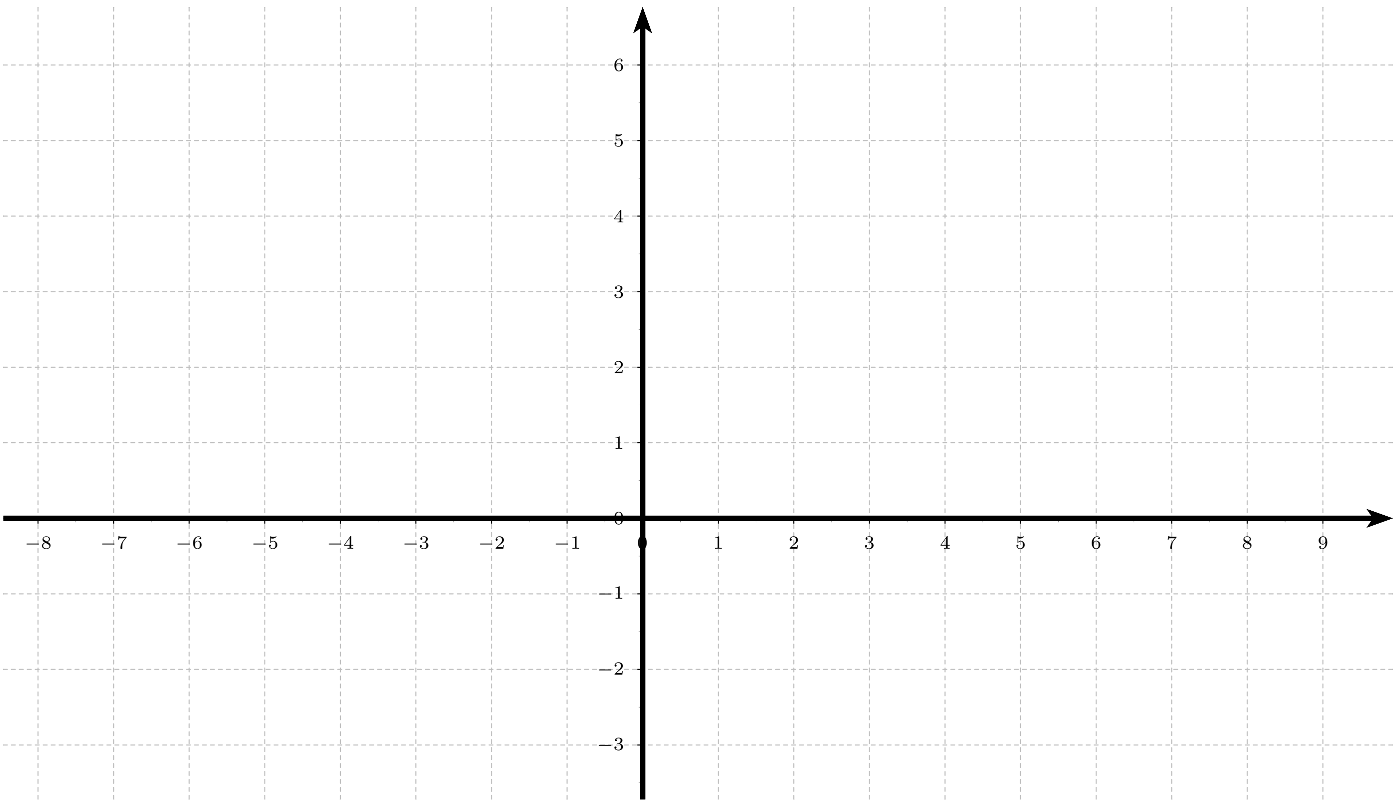
Une équation cartésienne d'une droite est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

On peut aussi écrire que la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des point M tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires (avec le déterminant).

Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne ET, quand cela est possible, l'équation réduite des droites suivantes :

1. La droite (d) passant par le point $A(-1\ ;\ 3)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
2. La droite (d') passant par le point $B(3\ ;\ 1)$ et le point $C(6\ ;\ 1)$
3. Tracer ces droites dans un même repère du plan.

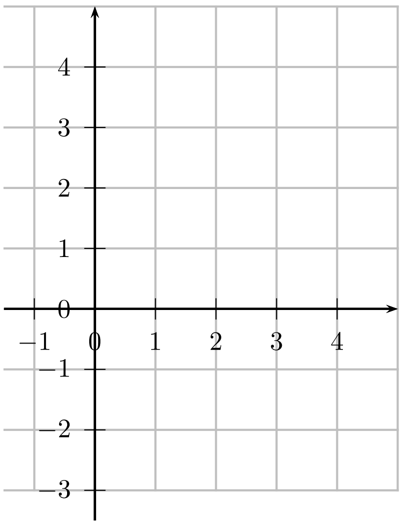


Partie IV. Le lien avec les systèmes linéaires

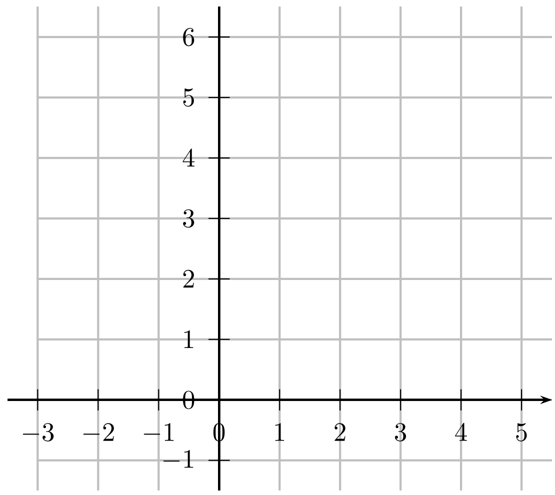
Exercice 12. Résolution graphique et par le calcul

Résoudre graphiquement puis par le calcul les systèmes suivants :

$$(S_1) \ : \ \begin{cases} y = x - 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$



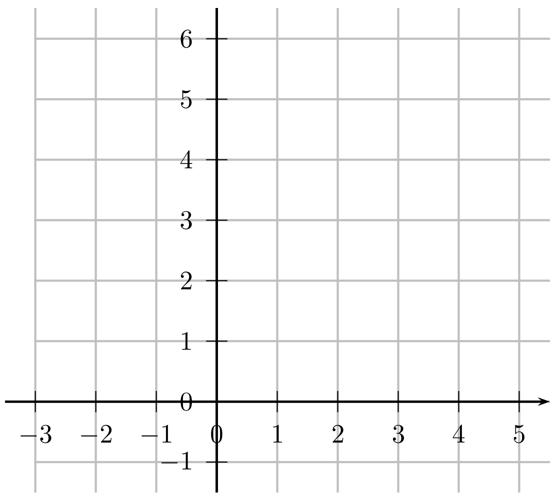
$$(S_2) \ : \ \begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$



Réponses
$I_1\,(2\ ;\ -1)\ ;\ I_2\,(-1\ ;\ 3)$.

Exercice 13. Équations et système

1. Écrire une équation de la droite (d_1) passant par le point $A\,(-2\ ;\ 6)$ et parallèle à la droite $(d)\ :\ y = -x + 3$.
2. Écrire une équation de la droite (d_2) passant par les points $B\,(-2\ ;\ -1)$ et $C\,(1\ ;\ 5)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (d_1) et (d_2) graphiquement puis par le calcul.



Réponses
$(d_1)\ :\ y = -x + 4\ ;\ (d_2)\ :\ y = 2x + 3\ ;\ I\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{11}{3}\right)$

Exercice 14. Quelques systèmes et Quelques fourberies

Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$

2. $(S_2)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

3. $(S_3)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \\ -3x-2y=-12 \end{cases}$

4. $(S_4)\ :\ \begin{cases} \dfrac{x}{5}+y=1 \\ x+5y=-12 \end{cases}$

5. $(S_5)\ :\ \begin{cases} x+\sqrt{2}y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

6. $(S_6)\ :\ \begin{cases} x^2+3y=4 \\ x^2+6y=7 \end{cases}$

Réponses

$I_1\,(-1\ ;\ 2)$, $I_2\left(\dfrac{11}{4}\ ;\ \dfrac{15}{8}\right)$, (S_3) a une infinité de solutions, (S_4) n'a pas de solution, $I_5\,\left(2\sqrt{2}+3\ ;\ -\sqrt{2}-2\right)$, (S_6) a deux solutions $I_6\,(-1\ ;\ 1)$ et $I_6'\,(1\ ;\ 1)$

Exercice 15. (c) Problèmes et systèmes (ex. 94 et 100)

1. Échanges gazeux. Un entomologiste étudie les échanges gazeux entre plantes dans une culture sous serre. Il obtient les résultats suivants :

- Une plantation de 80 ficus et 50 caoutchouc relâchent 75 m^3 d'O_2 en une nuit.
- Une plantation de 30 ficus et 60 caoutchouc relâchent 57 m^3 d'O_2 en une nuit.

Évaluer la production de chaque plante individuellement.

2. Un paysan élève des poulets et des lapins. Au total, il y a 50 têtes et 136 pattes. Combien a-t-il de poulets et de lapins ?

Partie V. Bilan

Exercice 16. Intersection des médianes

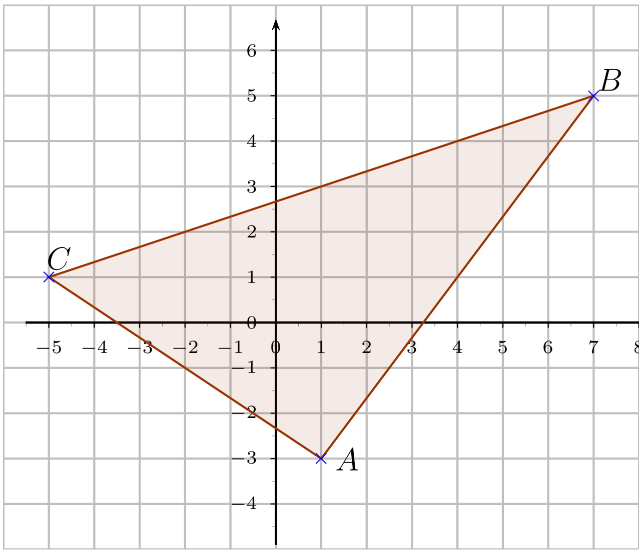
Soit $A\,(1\,;\,-3)$; $B\,(7\,;\,5)$ et $C\,(-5\,;\,1)$

1. Déterminer les coordonnées des milieux respectifs D, E et F des segments [AB], [BC] et [CA].

2. Déterminer les équations des trois médianes du triangle ABC.

3. Démontrer que ces trois médianes sont concourantes en un point G dont on précisera les coordonnées.

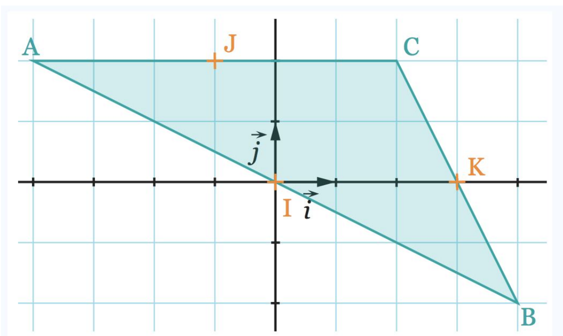
4. Déterminer l'équation de la droite (EF) et montrer par le calcul qu'elle est parallèle à la droite (AB).
Redémontrer-le sans utiliser les équations de droites.



Réponses
$D\,(4\,;\,1)$; $E\,(1\,;\,3)$; $F\,(-2\,;\,-1)$; $G\,(1\,;\,1)$; $(EA)\ :\ x=1$; $(BF)\ :\ y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$
$(CD)\ :\ y=1$; $(EF)\ :\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$; $(AB)\ :\ y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{13}{3}$

Exercice 17. (c) Toujours dans un triangle (ex89)

Les points I, J et K sont les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC].



1. Déterminer les équations réduites des droites (AK) et (BJ).

2. En déduire les coordonnées de leur point d'intersection G.

3. Démontrer que G appartient aussi à la droite (CI).

Exercice 18. Parabole et droites

1. Dresser le tableau de variations et construire dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par

$$f(x) = (x-1)^2 - 3$$

2. Déterminer l'équation de la droite (AB) avec $A\,(-3\,;\,5)$ et $B\,(-2\,;\,3)$.

3. Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées des points I et J, points d'intersection des deux courbes.

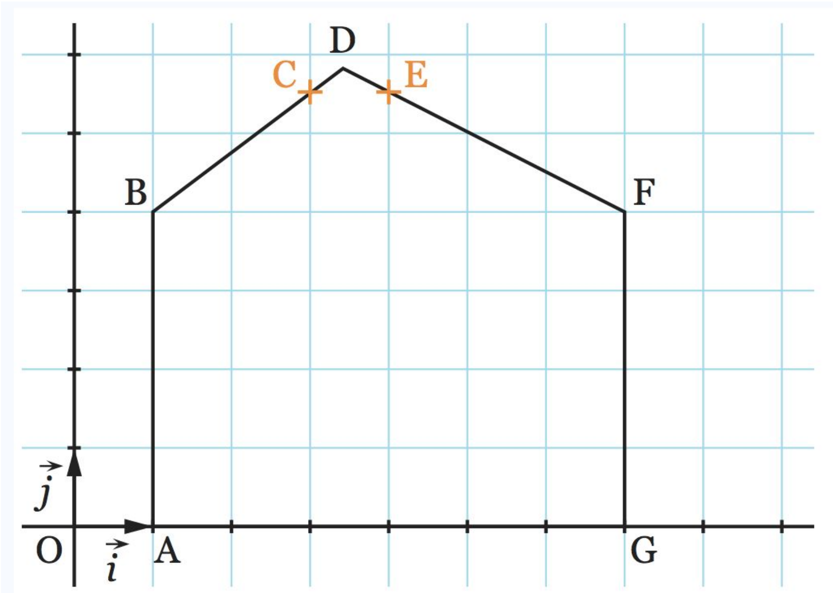
Réponses
$(AB)\ :\ y = -2x - 1$, $I\,(-1\,;\,1)$ *et* $J\,(1\,;\,-3)$.

Exercice 19. (c) Problème de pente (ex. 90)

On a représenté dans le repère ci-dessous une maison vue de côté. L'unité est le mètre. Les coordonnées des points représentés sont les suivantes :

$$A(1;0), B(1;4), C(3;5,5), E(4;5,5), F(7;4) \text{ et } G(7;0)$$

Le point D est à l'intersection des droites (BC) et (EF).



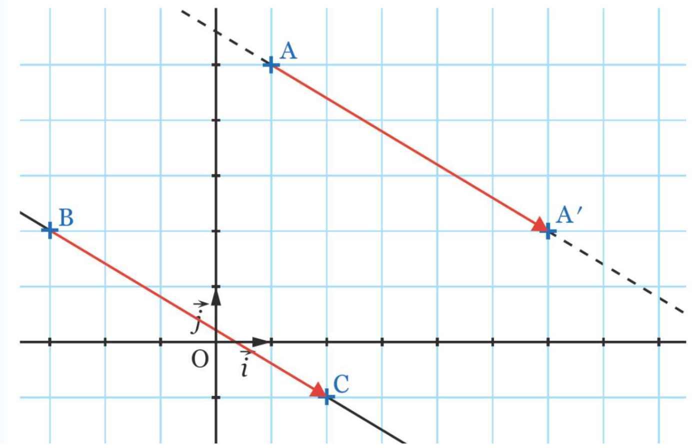
1. Calculer la pente de la partie gauche du toit.

2. Calculer la pente de la partie droite du toit.

3. En déduire les coordonnées du point D.

Partie VI. Correction

Correction de l'exercice 2



Soient trois points $A(1\,;5)$, $B(-3\,;2)$ et $C(2\,;-1)$ dans un repère orthonormé.

1. Le vecteur $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BC).

2. Le vecteur $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de la droite parallèle à (BC) passant par le point A.

Pour construire cette droite, on construit un point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$.
On a alors :

$$x_{A'} = x_C - x_B + x_A = 2 - (-3) + 1 = 6, \quad y_{A'} = y_C - y_B + y_A = -1 - 2 + 5 = 2.$$

Ainsi, $A'(6\,;2)$.
La droite (AA') est la droite parallèle à (BC) passant par A.

Correction de l'exercice 15

1. Échanges gazeux. Un entomologiste étudie les échanges gazeux entre plantes dans une culture sous serre. Il obtient les résultats suivants :

- Une plantation de 80 ficus et 50 caoutchouc relâchent 75 m^3 d'O_2 en une nuit.
- Une plantation de 30 ficus et 60 caoutchouc relâchent 57 m^3 d'O_2 en une nuit.

Évaluer la production de chaque plante individuellement.

Corrigé

On appelle :

x le volume d'oxygène produit par un ficus (en m^3), y le volume d'oxygène produit par un caoutchouc (en m^3).

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 80x + 50y = 75 & (1) \\ 30x + 60y = 57 & (2) \end{cases}$$

Étape 1 : On peut utiliser la méthode de combinaison linéaire. Commençons par éliminer une variable. Multiplions (1) par 3 et (2) par 8 pour éliminer x :

$$\begin{cases} 240x + 150y = 225 & (1) \times 3 \\ 240x + 480y = 456 & (2) \times 8 \end{cases}$$

Soustrayons la première équation à la seconde :

$$(240x + 480y) - (240x + 150y) = 456 - 225 \Rightarrow 330y = 231 \Rightarrow y = \frac{231}{330} = \frac{7}{10}$$

Étape 2 : On remplace $y = \frac{7}{10}$ dans l'équation (1) :

$$80x + 50 \times \frac{7}{10} = 75 \Rightarrow 80x + 35 = 75 \Rightarrow 80x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : Chaque ficus relâche $\boxed{\frac{1}{2}\text{ m}^3}$ d'oxygène, et chaque caoutchouc relâche $\boxed{\frac{7}{10}\text{ m}^3}$ d'oxygène en une nuit.

2. Un paysan élève des poulets et des lapins. Au total, il y a 50 têtes et 136 pattes. Combien a-t-il de poulets et de lapins ?

Corrigé

On appelle x le nombre de poulets et y le nombre de lapins, sachant que chaque poulet possède 2 pattes et une tête, et que chaque lapin possède 4 pattes et une tête.

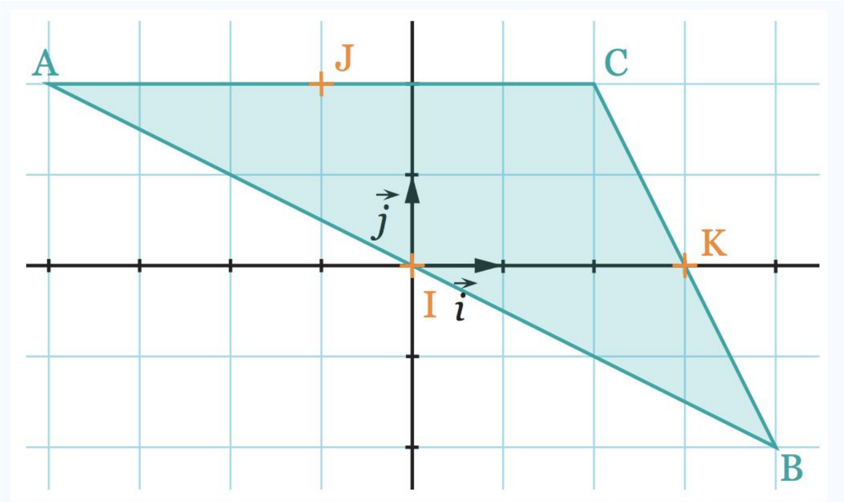
On résout alors le système :

$$\begin{cases} x + y = 50 & : (E1) \\ 2x + 4y = 136 & : (E2) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 50 \\ -2y = -36 & : 2(E1) - (E2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y = 50 \\ y = 18 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 32 \\ y = 18 \end{cases}$$

Le paysan possède donc **32 poulets** et **18 lapins**.

Correction de l'exercice 17

Les points I, J et K sont les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC].



1. Déterminer les équations réduites des droites (AK) et (BJ).

Après calculs, on trouve $(AK) : y = -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}$ et $(BJ) : y = -0,8x + 1,2$

2. En déduire les coordonnées de leur point d'intersection G.

On résout l'équation $-\frac{2}{7}x + \frac{6}{7} = -0,8x + 1,2$. On trouve alors que $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

3. Démontrer que G appartient aussi à la droite (CI).

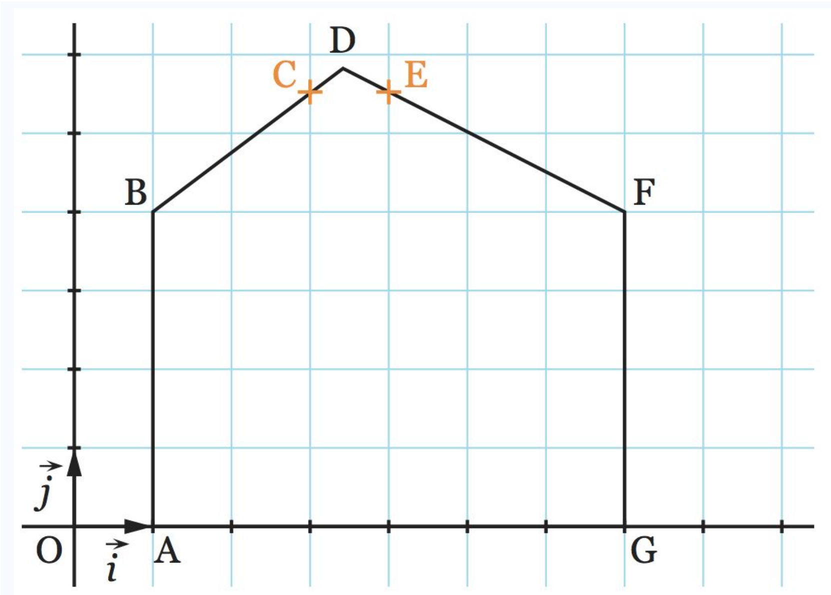
La droite (CI) admet pour équation réduite $y = x$. Les coordonnées de G sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ qui vérifient donc bien l'équation $y = x$. DOnc G appartient bien à la droite (CI).

Exercice 20. (c) Problème de pente (ex. 90)

On a représenté dans le repère ci-dessous une maison vue de côté. L'unité est le mètre. Les coordonnées des points représentés sont les suivantes :

$$A(1;0), B(1;4), C(3;5,5), E(4;5,5), F(7;4) \text{ et } G(7;0)$$

Le point D est à l'intersection des droites (BC) et (EF).



1. Calculer la pente de la partie gauche du toit.

La partie gauche du toit a une pente de $\dfrac{5,5-4}{3-1} = \dfrac{3}{4}$.

2. Calculer la pente de la partie droite du toit.

La partie droite du toit a une pente de $\dfrac{4-5,5}{7-4} = -\dfrac{1}{2}$.

3. En déduire les coordonnées du point D.

La droite (BC) admet pour équation réduite $y = \dfrac{3}{4}x + 3,25$. La droite (EF) admet pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{2}x + 7,5$. Le point D est l'intersection de ces deux droites, donc son abscisse est solution de l'équation $\dfrac{3}{4}x + 3,25 = -\dfrac{1}{2}x + 7,5$, et donc $D(3,4;5,8)$.