Math93.com

TD n°4 - Seconde
Expressions algébriques : Équations

Exemple 1 (Deux rédactions types sont proposées)

Résoudre : $(E_1)\ :\ \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}=0$.

1. **Valeurs interdites.**
   Il faut que :
   $$x^2-1\neq 0 \iff (x\neq 1)\ \text{ et }\ (x\neq -1)$$
   On va alors résoudre l'équation sur l'ensemble des réels privé de 1 et de -1 ce qui se note $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$.
2. **Résolvons l'équation sur $I_1=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$.**
   Sur I_1 on a :
   $$(E_1)\iff x^3-2x^2+x=0$$
   $$(E_1)\iff x\left(x^2-2x+1\right)=0$$
   $$(E_1)\iff x(x-1)^2=0$$
   Un produit est nu si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :
   $$(E_1)\iff (x=0)\ \text{ ou }\ (x-1=0)$$
   $$(E_1)\iff (x=0\in I_1)\ \text{ ou }\ (x=1\notin I_1)$$
3. **Conclusion : on se ramène à l'intervalle I_1.**
   Puisque $x=1\notin I_1$, l'équation (E_1) admet donc une unique solution, $x=0$ sur l'intervalle I_1.

Résoudre : $(E_2)\ :\ \dfrac{2x-3}{2-x}=\dfrac{3}{x}$.

1. **Valeurs interdites.**
   Il faut que :
   $$(2-x\neq 0)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\iff (x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)$$
2. **Résolvons l'équation .**
   On a :
   $$(E_2)\iff\begin{cases}(x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\\ (2x-3)\times x=(2-x)\times 3\end{cases}$$
   $$(E_2)\iff\begin{cases}(x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\\ 2x^2-3x=6-3x\end{cases}$$
   $$(E_2)\iff\begin{cases}(x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\\ 2x^2=6\end{cases}$$
   $$(E_2)\iff\begin{cases}(x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\\ x^2=3\end{cases}$$
   $$(E_2)\iff\begin{cases}(x\neq 2)\ \text{ et }\ (x\neq 0)\\ \left(x=\sqrt{3}\right)\ \text{ ou }\ \left(x=-\sqrt{3}\right)\end{cases}$$
3. **Conclusion..**
   L'équation (E_2) admet donc deux solutions, $x=\sqrt{3}$ et $x=-\sqrt{3}$.

Exercice 1. A vous de jouer

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé les valeurs interdites bien sûr.

1. $(E_1)\ :\ \dfrac{5x-2}{5-x}=\dfrac{2}{x}$
2. $(E_2)\ :\ \dfrac{(x+1)(x^2-6x+9)}{x^2-9}=0$
3. $(E_3)\ :\ \dfrac{x+1}{5+x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}$
4. $(E_2)\ :\ \dfrac{x^3-x}{5-x^2}=-x$

Réponses

$S_1=\left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}$; $S_2=\{-1\,;\,3\}$; $S_3=\{-1\}$; $S_4=\{0\}$.

Exercice 2. Conjecture et calcul

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x)=4x^3-24x^2+36x$$

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.
2. Factoriser $h(x)$.
3. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses.

Réponses

$h(x) = 4x(x-3)^2$; $S = \{0 ; 3\}$.

Exercice 3. Conjecture et calcul

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 \text{ et } g(x) = x^3 - 7x - 6$$

A - Conjectures

1. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_1) : f(x) = 0$ et l'extremum de f.

2. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_2) : g(x) = 0$.

3. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_3) : g(x) = f(x)$.

4. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_4) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

5. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_5) : \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

6. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_6) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

7. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les solutions de l'équation $(E_7) : \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

B - Preuves

8. Pour la fonction f.

8. a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

8. b. En déduire les solutions de l'équation $(E_1) : f(x) = 0$.

8. c. Déterminer l'extremum (minimum ou maximum) de f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

9. Pour la fonction g.

9. a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$g(x) = (x-3)(x+2)(x+1)$$

9. b. En déduire les solutions de l'équation $(E_2) : g(x) = 0$.

10. Pour l'équation $(E_3) : g(x) = f(x)$.

10. a. Montrer que :

$$(E_3) \iff (x+1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

10. b. Montrer que :

$$x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$$

10. c. En déduire les solutions de l'équation (E_3).

11. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre les équations (E_4) et (E_5).

12. Après avoir déterminé les valeurs interdites, résoudre les équations (E_6) et (E_7).

Réponses

- ***8b.*** $S_1 = \{-1 ; 2\}$; ***8c.*** *Le minimum de f est $-\frac{9}{4}$, atteint pour $x = \frac{1}{2}$.*
- ***9b.*** $S_2 = \{-2 ; -1 ; 3\}$.
- ***10c.*** $S_3 = \left\{\left(1-\sqrt{5}\right) ; -1 ; \left(1+\sqrt{5}\right)\right\}$.
- ***11.*** $S_4 = \{2\}$; $S_5 = \{-2 ; 3\}$.
- ***12.*** $S_6 = \left\{\left(1-\sqrt{5}\right) ; \left(1+\sqrt{5}\right)\right\} = S_7$.

Exercice 4. Bilan du Chapitre (c)

Cet exercice est intégralement corrigé en fin de TD.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer en développant que : $f(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$.

2. Montrer <u>à l'aide d'une factorisation</u> que : $f(x) = (1-2\,x)\ (x-2)$.

3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = -2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8}$.

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$.

2. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

3. a. $(E_1) : f(x) = 0$;

3. b. $(E_2) : f(x) = \dfrac{9}{8}$;

3. c. $(E_3) : f(x) = (x-2)$.

4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

Exercice 5. Algorithmique (c)

On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

Fonction $f(x)$:
  Si $x \geq 0$:
    Renvoyer $(x-5)^2 - (-1+x)^2$
  Sinon :
    Renvoyer $2x - 3$

1. Que va renvoyer la fonction si on entre dans la console $f(2)$ et $f(-2)$?

2. Que proposer comme valeur(s) pour x afin que la fonction renvoie 0 ?

Correction

Correction de l'exercice 4

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$.

Partie A : Écrire et transformer

2. a. Montrer en développant que : $f(x) = \underline{-2x^2+5x-2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= 1-4x+4x^2-\left(3-3x-6x+6x^2\right) \\ &= 1-4x+4x^2-3+3x+6x-6x^2 \\ f(x) &= \underline{-2x^2+5x-2} \end{aligned}$$

2. b. Montrer <u>à l'aide d'une factorisation</u> que : $f(x) = \underline{(1-2x)(x-2)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= (1-2x)^2 - 3(1-2x)(1-x) \\ &= (1-2x)\Big[(1-2x)-3(1-x)\Big] \\ &= (1-2x)\Big[1-2x-3+3x\Big] \\ f(x) &= \underline{(1-2x)(-2+x)} \end{aligned}$$

2. c. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \underline{-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}}$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8} &= -2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)+\frac{9}{8} \\ &= -2x^2+5x-\frac{25}{8}+\frac{9}{8} \\ &= -2x^2+5x-2 \\ &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

5. a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

En utilisant la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)}_{0}\times\left(\frac{1}{2}-2\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=0}$$

En utilisant la forme (3.)

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -2\underbrace{\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\right)^2}_{0}+\frac{9}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{8}}$$

5. b. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}-6$.

En utilisant la forme développée :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{2}\right)^2+5\left(\sqrt{2}\right)-2 = -4+5\left(\sqrt{2}\right)-2 = \underline{5\sqrt{2}-6}$$

5. c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$f(x) = 0$

$$\iff (1-2x)\ (x-2) = 0$$
$$\iff \left(1-2x=0\right) \text{ ou } \left(x-2=0\right)$$
$$\iff \left(x=\frac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(x=2\right)$$

Les solutions de (E_1) sont $\frac{1}{2}$ et 2 .

$f(x) = \frac{9}{8}$

$$\iff -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$$
$$\iff -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = 0$$
$$\iff \left(x-\frac{5}{4}\right) = 0$$
$$\iff x = \frac{5}{4}$$

La solution de (E_2) est $\frac{5}{4}$.

$f(x) = (x-2)$

$$\iff (1-2x)\ (x-2) = (x-2)$$
$$\iff (1-2x)\ (x-2) - (x-2) = 0$$
$$\iff (x-2)\Big((1-2x)-1\Big) = 0$$
$$\iff (x-2)(-2x) = 0$$
$$\iff \left(x-2=0\right) \text{ ou } \left(-2x=0\right)$$
$$\iff \left(x=2\right) \text{ ou } \left(x=0\right)$$

Les solutions de (E_3) sont 0 et 2 .

5. d. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

D'après la question A3 on a que pour tout réel x :

$$f(x) = -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

Pour tout réel x, l'expression $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2$ est positive ou nul donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$$

En multipliant par $(-2) < 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 \leq 0$$

Et donc en ajoutant $\frac{9}{8}$ de chaque côté :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \underbrace{-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}_{f(x)} \leq \frac{9}{8}$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) \leq \frac{9}{8}$$

Le nombre $\frac{9}{8}$ est donc un majorant de f sur $\mathbb{R}$, or d'après la question B1, il est atteint pour $x = \frac{5}{4}$, c'est donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5 : Algorithmique

Pseudo Code

```
Fonction f(x) :
    Si x ≥ 0 :
        Renvoyer (x − 5)^2 − (−1 + x)^2
    Sinon :
        Renvoyer 2x − 3
```

5. a. Que va renvoyer la fonction si on entre dans la console $f(2)$ et $f(-2)$?

- Si on entre dans la console $f(2)$, puisque 2 est positif on obtient :

$$f(2) = (2-5)^2 - (-1+2)^2 = (-3)^2 - 1^2 = \underline{8}$$

- Si on entre dans la console $f(-2)$, puisque (-2) est négatif on obtient :

$$f(-2) = 2 \times (-2) - 3 = \underline{-7}$$

5. b. Que proposer comme valeur(s) pour x afin que la fonction renvoie 0 ?

On va résoudre les deux équations et vérifier si les résultats sont cohérents.

- Cas $x \geq 0$.
  Si on suppose que x est positif ou nul, par factorisation on a :

$$\begin{aligned}(x-5)^2-(-1+x)^2=0 &\iff \Big(x-5-(-1+x)\Big)\Big(x-5+(-1+x)\Big)\\ &\iff \Big(x-5+1-x\Big)\Big(x-5-1+x\Big)\\ &\iff -4\Big(2x-6\Big)\\ &\iff x=3\in[0\,;+\infty[\end{aligned}$$

  Donc cette solution est valable car positive.
- Cas $x < 0$.
  Si on suppose que x est négatif strictement :

$$2x-3=0 \iff x=\frac{2}{3}\notin\,]-\infty\,;0[$$

  Donc cette solution n'est pas valide car on avait supposé que x était strictement négatif.
- Conclusion : pour que la fonction renvoie 0 , on peut prendre comme valeur, $x=3$ uniquement.