



TD 1 - Seconde

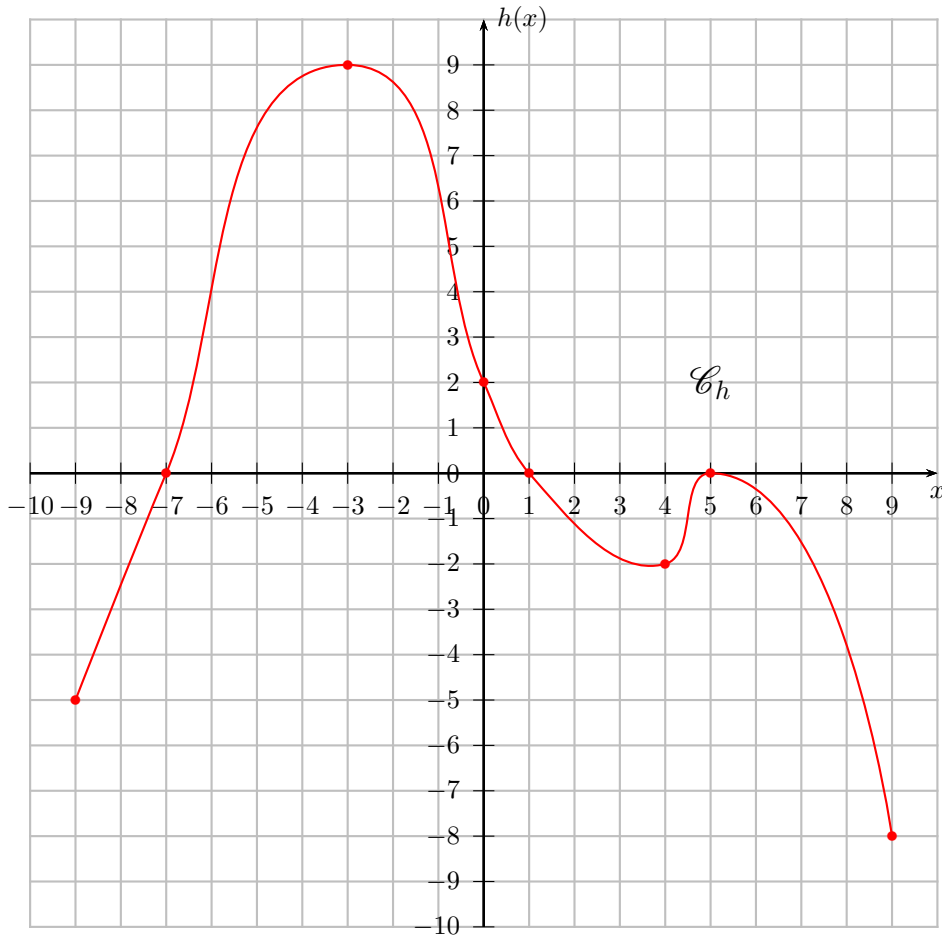
Notion de fonction

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Partie I. Notion de fonction

Exercice 1. Lectures graphique (c)

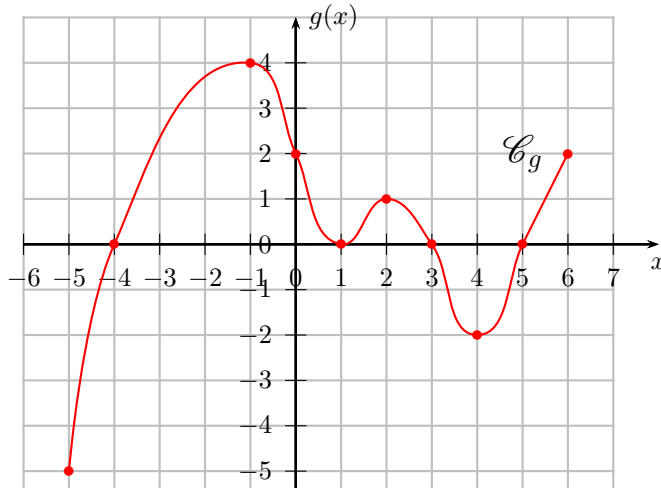
On considère la fonction h dont on donne la courbe représentative \mathcal{C}_h ci-dessous.



1. Lire l'ensemble de définition \mathcal{D}_h de la fonction h
2. Donner les images par la fonction h de -3 et 0
3. Donner les antécédents par h de 2
4. Donner les antécédents par h de 0
5. Déterminer l'ensemble des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction h . On note E cet ensemble.
6. Quels sont les maximum et minimum de h sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?

Exercice 2. Lectures graphiques (c)

On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative \mathcal{C}_g ci-dessous.



1. Lire l'ensemble de définition \mathcal{D}_g de la fonction g
2. Donner les images par la fonction g de -4 et 4
3. Donner les antécédents par g de 4
4. Donner les antécédents par g de 0
5. Déterminer l'ensemble des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction g . On note E cet ensemble.....
6. Quels sont les maximum et minimum de g sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?
7. Déterminer l'ensemble des réels qui ont exactement un antécédents par la fonction g

Réponses
 1. $[-5 ; 6]$ / 2. 0 et -2 / 3. -1 / 4. $-4 ; 1 ; 3 ; 5$ / 5. $E = [-4 ; 3] \cup [5 ; 6]$
 6. Max. 4 atteint pour $x = -1$ et Min. -5 atteint pour $x = -5$ / 7. $[-5 ; -2[\cup \{4\}$

Partie II. Parité

Exercice 3. Étude de parité (c)

Étudier la parité des fonctions suivantes :

Méthode

1. Vérifier si l'ensemble de définition est bien centré en 0 .
2. Si on veut montrer que la fonction n'est ni paire, ni impaire, un contre-exemple suffit !
3. Sinon montrer que pour tout $x \in I$ on a $f(-x)$ égal à $f(x)$ (paire) ou à $-f(x)$ (cas impaire).

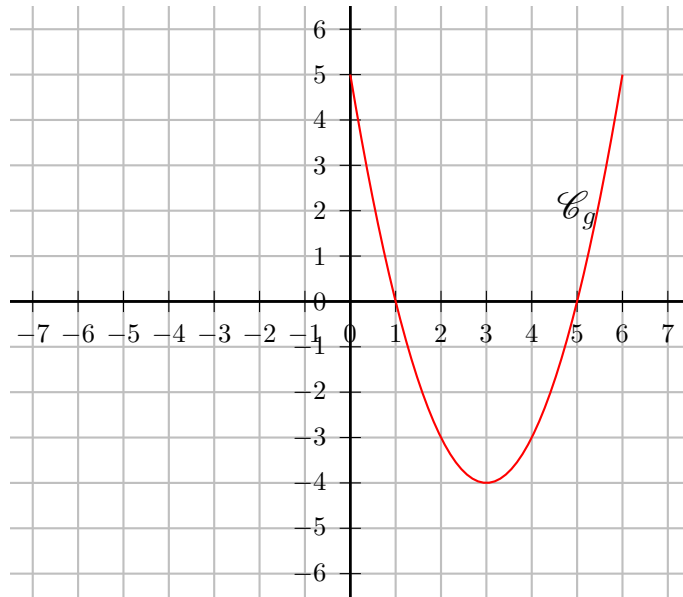
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. f_1 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. f_2 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^3 + x$.
3. f_3 définie sur $I_3 = [-5 ; 5]$ par $f_3(x) = x^2 + x$.
4. f_4 définie sur $I_4 = [-4 ; 5]$ par $f_4(x) = 5x^3$.
5. f_5 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_5(x) = \sqrt{|x| + 2}$.

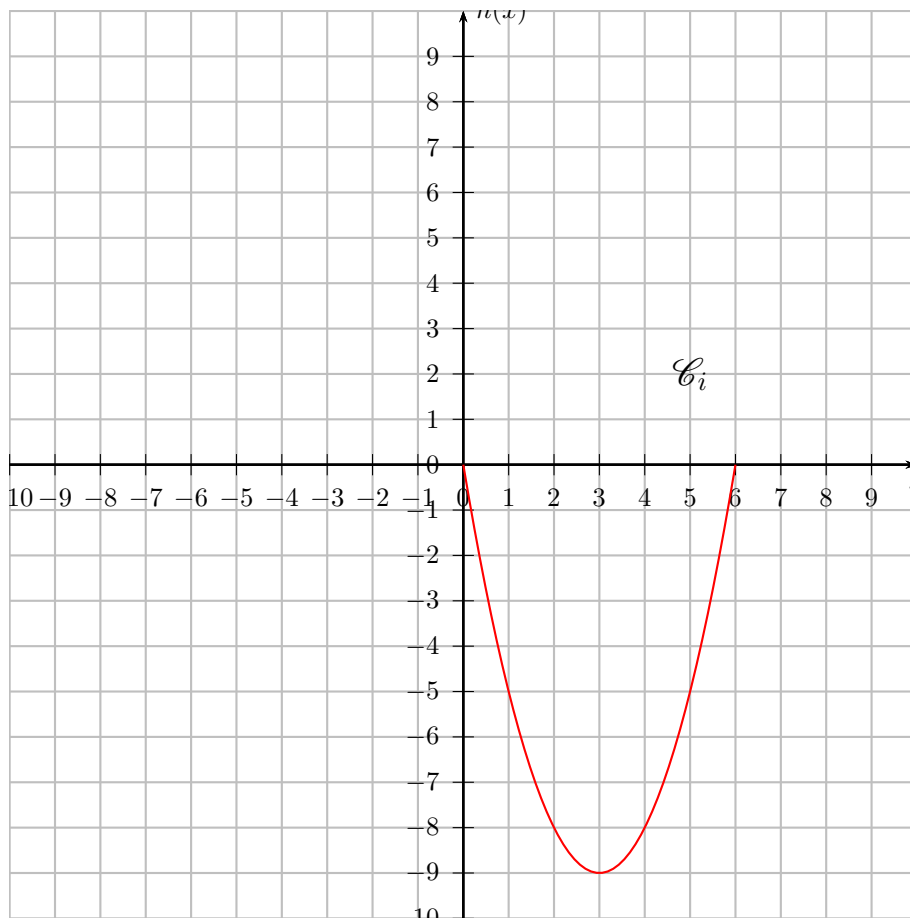
Exercice 4. Parité et représentation graphique (c)

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 6]$ de courbe représentative \mathcal{C}_g dans un repère orthogonal $(O ; I ; J)$.

1. On a tracé \mathcal{C}_g sur $[0 ; 6]$. Compléter la courbe de g sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ pour définir une fonction h paire sur $[-6 ; 6]$.



2. On a tracé \mathcal{C}_g sur $[0 ; 6]$. Compléter la courbe de g sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ pour définir une fonction i impaire sur $[-6 ; 6]$.



Exercice 5. !Une fonction ... algébrique 1 (c) : là on peut discuter!

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -3x^2 + 12x + 15$$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{5}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.
2. Déterminer l'image de $(4 + \sqrt{7})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.
3. Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{2}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.
4.
 4. a. Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = -3(-1 - x)(5 - x)$$
 4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les antécédents de 15 par f .
6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + kx$, avec k réel.
7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{7} - 4)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

**Réponses**

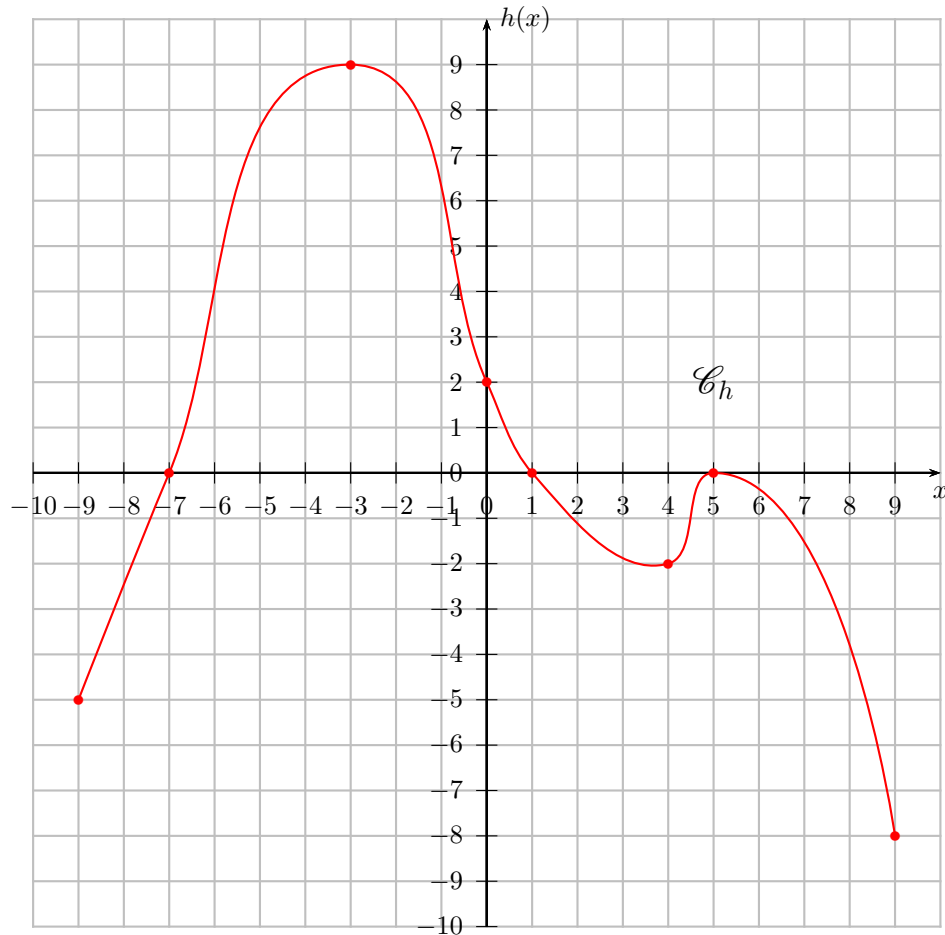
1. $f(\sqrt{5}) = 0 + 12\sqrt{5}$ / 2. $f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}$ / 3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}$ / 4. b. $A(-1; 0)$; $B(5; 0)$
 / 5. $S = \{0; 4\}$ / 6. $f(-x) = f(x) - 24x$ / 7. $f(-\sqrt{7} - 4) = -102 - 36\sqrt{7}$

**Remarque**

Si vous aimez plus que tout au monde cet exercice fabuleux, il y a un TD spécial pour vous entièrement corrigé ici : [Lien TD PPF](#)

Partie III. Correction

Correction de l'exercice 1 page 1



1. Lire l'ensemble de définition \mathcal{D}_h de la fonction h .



Corrigé

| On a $\mathcal{D}_h = [-9; 9]$

2. Donner les images par la fonction h de -3 et 0 .



Corrigé

| On a $f(-3) = 9$ et $f(0) = 2$

3. Donner les antécédents par h de 2 .



Corrigé

| Les antécédents de 2 par h sont : $-6, 4$ et 0 .

4. Donner les antécédents par h de 0 .

**Corrigé**

| Les antécédents de 0 par h sont : -7 ; 1 ; 5 .

5. Déterminer l'ensemble des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction h . On note E cet ensemble.

**Corrigé**

| $E = [-7 ; 1] \cup \{5\}$

6. Quels sont les maximum et minimum de h sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?

**Corrigé**

| Max. 9 atteint pour $x = -3$ et Min. -8 atteint pour $x = 9$

Correction de l'exercice 3 page 2

Étudier la parité des fonctions suivantes :

**Méthode**

1. Vérifier si l'ensemble de définition est bien centré en 0.
2. Si on veut montrer que la fonction n'est ni paire, ni impaire, un contre-exemple suffit !
3. Sinon montrer que pour tout $x \in I$ on a $f(-x)$ égal à $f(x)$ (paire) ou à $-f(x)$ (cas impaire).

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. f_1 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 1$.

**Corrigé**

- Intervalle de définition :
La fonction est définie sur $I = \mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.
- Étude de la parité :
Pour tout réel x de I , on a $(-x) \in I$ et :

$$f_1(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f_1(x)$$

Donc la fonction est paire sur I et sa courbe est est symétrique par rapport à l'axe (Oy) parallèlement à l'axe (Ox) .

2. f_2 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^3 + x$.

**Corrigé**

- Intervalle de définition :
La fonction est définie sur $I = \mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.
- Étude de la parité :
Pour tout réel x de I , on a $(-x) \in I$ et :

$$f_2(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f_2(x)$$

Donc la fonction est impaire sur I et sa courbe est est symétrique par rapport à l'origine du repère .

3. f_3 définie sur $I_3 = [-5 ; 5]$ par $f_3(x) = x^2 + x$.



Corrigé

- Intervalle de définition :

La fonction est définie sur $I_3 = [-5 ; 5]$ qui est bien centré en 0.

- Étude de la parité : on exhibe un contre-exemple

On a

$$f_3(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0 \quad \text{et} \quad f_3(1) = (1)^2 + (1) = 2$$

Donc

$$f_3(-1) \neq f_3(1) \quad \text{et} \quad f_3(-1) \neq -f_3(1)$$

La fonction f_3 n'est ni paire, ni impaire.

4. f_4 définie sur $I_4 = [-4 ; 5]$ par $f_4(x) = 5x^3$.



Corrigé

- Intervalle de définition :

On a $5 \in I_4 = [-4 ; 5]$ mais son opposé $(-5) \notin I_4 = [-4 ; 5]$ donc l'intervalle de définition n'est pas centré en 0, la fonction f_4 n'est donc ni paire, ni impaire.

5. f_5 définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f_5(x) = \sqrt{|x| + 2}$.



Corrigé

- Intervalle de définition :

La fonction est définie sur $I = \mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.

- Étude de la parité :

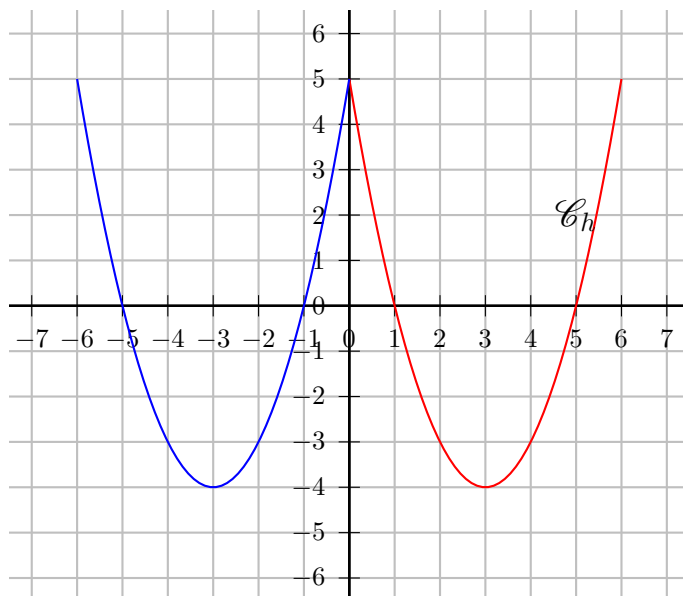
Pour tout réel x de I , on a $(-x) \in I$ et :

$$f_5(-x) = \sqrt{|-x| + 2} = \sqrt{|x| + 2} = f_5(x)$$

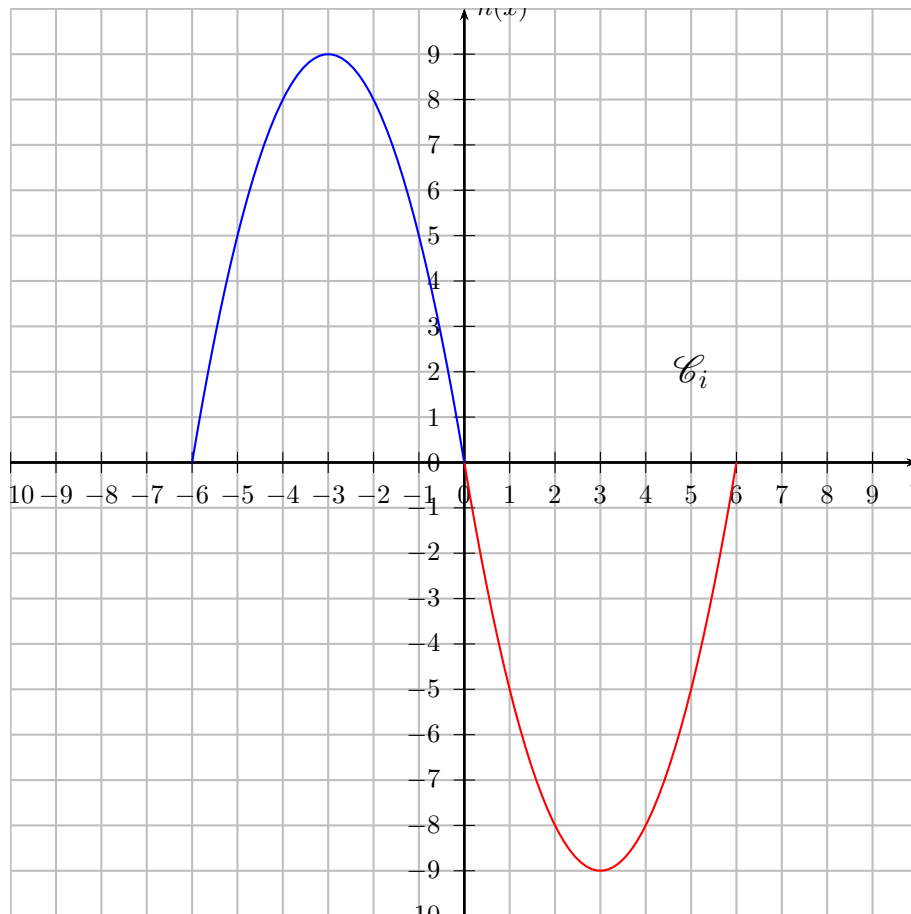
Donc la fonction est paire sur I et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) parallèlement à l'axe (Ox) .

Correction de l'exercice 4 page 3

1. On a tracé \mathcal{C}_g sur $[0 ; 6]$. Compléter la courbe de g sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ pour définir une fonction h paire sur $[-6 ; 6]$.



2. On a tracé \mathcal{C}_g sur $[0 ; 6]$. Compléter la courbe de g sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ pour définir une fonction i impaire sur $[-6 ; 6]$.



Correction de l'exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -3x^2 + 12x + 15$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{5}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{5}) &= -3 \times (\sqrt{5})^2 + 12 \times (\sqrt{5}) + 15 \\ f(\sqrt{5}) &= \underbrace{-3 \times 5 + 15}_0 + 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(\sqrt{5}) = 0 + 12\sqrt{5}}$$

2. Déterminer l'image de $(4 + \sqrt{7})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (4 + \sqrt{7})^2 + 12 \times (4 + \sqrt{7}) + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times \left((4)^2 + 2 \times (4) \times \sqrt{7} + 7 \right) + \underbrace{12 \times (4)}_{48} + 12 \times \sqrt{7} + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (16 + 8\sqrt{7} + 7) + 48 + 12\sqrt{7} + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (23 + 8\sqrt{7}) + 12\sqrt{7} + 63 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -69 \underbrace{-24\sqrt{7} + 12\sqrt{7}}_{-12\sqrt{7}} + 63 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= \underbrace{-69 + 63}_{-6} - 12\sqrt{7} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}}$$

3. Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{2}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 15 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3 \times 1^2}{2^2} + \frac{12 \times 1}{2} + 15 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3 + 12 \times 2 + 15 \times 4}{4} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}}$$

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = -3(-1 - x)(5 - x)$.

Par définition on sait juste que pour tout réel x ,

$$f(x) = -3x^2 + 12x + 15$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à $f(x)$ surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de f . Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -3(-1 - x)(5 - x) &= -3 \left(-1 \times 5 + \underbrace{1x - 5x + x^2}_{-4x} \right) \\ -3(-1 - x)(5 - x) &= -3(-5 - 4x + x^2) \\ -3(-1 - x)(5 - x) &= \underbrace{-3x^2 + 12x + 15}_{f(x)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = -3(-1 - x)(5 - x)}$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 0$. En utilisant l'expression de f démontrée lors de la question 4.a. on obtient :

$$f(x) = 0 \iff -3(-1 - x)(5 - x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -1 - x = 0 \quad \text{ou} \quad 5 - x = 0 \\ f(x) = 0 &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 5 \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \{A(-1; 0); B(5; 0)\}}$$

5. Déterminer les antécédents de 15 par f .

Les antécédents de 15 par f sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 15$. En utilisant l'expression initiale de f on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = 15 &\iff -3x^2 + 12x + 15 = 15 \\ f(x) = 15 &\iff -3x^2 + 12x = 0 \\ f(x) = 15 &\iff x(-3x + 12) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 15 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 12 = 0 \\ f(x) = 15 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

Les antécédents de 15 par f sont donc 0 et 4.

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \{0; 4\}}$$

6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) - 24x$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f(x) &= -3x^2 + 12x + 15 \\ f(-x) &= -3x^2 - 12x + 15 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Par soustraction}} \quad f(-x) - f(x) = -24x \implies \boxed{f(-x) = f(x) - 24x}$$

7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{7} - 4)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Lors de la question 2. on a prouvé que :

$$f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}$$

De plus on a obtenu dans la question 6. que pour tout réel x on a

$$f(-x) = f(x) - 24x$$

Or en appliquant cette égalité avec $x = 4 + \sqrt{7}$ soit $-x = -\sqrt{7} - 4$ on obtient :

$$f(-\sqrt{7} - 4) = \underbrace{f(4 + \sqrt{7})}_{-6 - 12\sqrt{7}} - 24 \times (4 + \sqrt{7})$$

$$f(-\sqrt{7} - 4) = -6 - 12\sqrt{7} - \underbrace{24 \times 4}_{-96} - 24\sqrt{7}$$

$$\boxed{f(-\sqrt{7} - 4) = -102 - 36\sqrt{7}}$$