

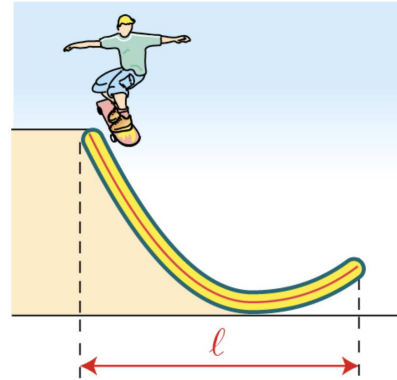


Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Partie I. Fonctions carré et racine carrée

Exercice 1. Un tremplin

Ce tremplin a la forme de la parabole représentative de la fonction carré dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre. Il est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre. Calculer sa largeur ℓ en m. Arrondir au dixième.



Corrigé

On peut utiliser les variations de la fonction carré :

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	\downarrow 2	0	\downarrow 0.5	$+\infty$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \alpha = -\sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{0,5} \end{cases} \implies \ell = \beta - \alpha = \sqrt{0,5} + \sqrt{2} \approx \underline{\underline{2,1 \text{ m}}}$$

Exercice 2. Un encadrement (ex. 28,29,30)

x est un nombre réel tel que $-2 \leq x \leq 3$. À l'aide des variations de la fonction carré, on souhaite déterminer un encadrement pour x

1. Première méthode : sans tableau de variations.
 1. a. On suppose que $x \leq 0$. Montrer en justifiant que $0 \leq x^2 \leq 4$.
 1. b. On suppose que $x \geq 0$. Montrer en justifiant que $0 \leq x^2 \leq 9$.
 1. c. En déduire un encadrement de x^2 quand $-2 \leq x \leq 3$.
2. Seconde méthode : avec tableau de variations.
 2. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction carré sur $[-2 ; 3]$.
 2. b. En déduire un encadrement de x^2 quand $-2 \leq x \leq 3$.
3. En utilisant la méthode de votre choix, donner un encadrement de x^2 sachant que :
 3. a. $-10 \leq x \leq -5$;
 3. b. $3 \leq x \leq 4$;
 3. c. $-10 \leq x \leq 5$;



Corrigé

1. Première méthode : sans tableau de variations.

1. a. Puisque la fonction carré est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- on a :

$$-2 \leq x \leq 0 \implies (-2)^2 \geq x^2 \geq 0^2 \implies 0 \leq x^2 \leq 4$$

1. b. Puisque la fonction carré est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ on a :

$$0 \leq x \leq 3 \implies 0^2 \leq x^2 \leq 3^2 \implies 0 \leq x^2 \leq 9$$

1. c. Donc on vient de montrer que quand $-2 \leq x \leq 3$, on a :

$$0 \leq x^2 \leq 9$$

2. Seconde méthode : avec tableau de variations.

2. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction carré sur $[-2 ; 3]$.

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	\downarrow 4	\searrow 0	\nearrow 9	$+\infty$

2. b. Donc d'après le tableau de variations quand $-2 \leq x \leq 3$, on a : $0 \leq x^2 \leq 9$.

3. En utilisant la méthode de votre choix, donner un encadrement de x^2 sachant que :

3. a.

$$-10 \leq x \leq -5 \implies 25 \leq x^2 \leq 100$$

3. b.

$$3 \leq x \leq 4 \implies 9 \leq x^2 \leq 16$$

3. c.

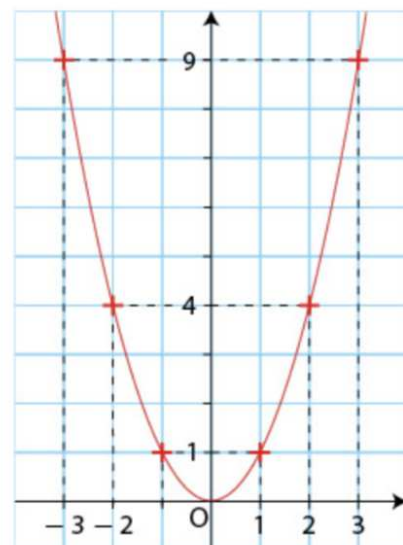
$$-10 \leq x \leq 5 \implies 0 \leq x^2 \leq 100$$

Exercice 3. Équations, inéquations et fonction carré

Équations $x^2 = a$

Soit a un paramètre réel. On considère l'équation $x^2 = a$.

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} .
- Si $a = 0$, l'équation a une unique solution 0.
- Si $a > 0$, l'équation a deux solutions réelles qui sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.



Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

- | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. $x^2 = 9$</p> <p>2. $x^2 = -3$</p> <p>3. $x^2 = \pi$</p> | | <p>4. $x^2 \leq 4$</p> <p>5. $x^2 \leq -2$</p> <p>6. $x^2 > 1$</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Corrigé

1. $x^2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$
2. $x^2 = -3$. Cette équation n'a pas de solution réelle. En effet, pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$.
3. $x^2 = \pi \iff x = \sqrt{\pi}$ ou $x = -\sqrt{\pi}$
4. $x^2 \leq 4$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	\downarrow 4	\downarrow 0	\downarrow 4	$+\infty$

La fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ et

$$x^2 = 4 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2$$

donc :

$$x^2 \leq 4 \iff x \in [-2 ; 2]$$

5. $x^2 \leq -2$. Cette inéquation n'a pas de solution réelle. En effet, pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$.
6. $x^2 > 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	\downarrow 1	\downarrow 0	\downarrow 1	$+\infty$

La fonction carré est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ et

$$x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1$$

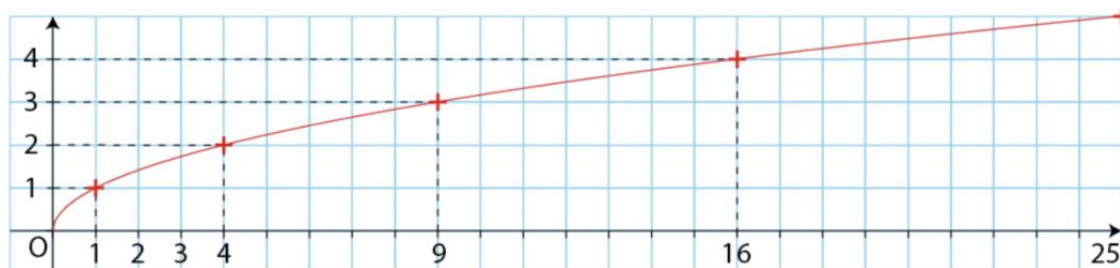
donc :

$$x^2 > 1 \iff x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$$

Exercice 4. Équations et fonction racine carrée

Résoudre dans \mathbb{R}_+ les équations et les inéquations suivantes :

- | | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. $\sqrt{x} = 2$</p> <p>2. $\sqrt{x} = 0,5$</p> <p>3. $\sqrt{x} \geq 2$</p> | | <p>4. $\sqrt{x} < 4$</p> <p>5. $\sqrt{x} \leq -4$</p> <p>6. $\sqrt{x} \geq -1$</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Corrigé

1. $\sqrt{x} = 2 \iff x = 4$
2. $\sqrt{x} = 0,5 \iff x = 0,5^2 = 0,25$
3. $\sqrt{x} \geq 2$

x	0	4	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ 2 \end{array}$		$+\infty$
	\nearrow		

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ donc :

$$\sqrt{x} \geq 2 \iff x \geq 4$$

4. $\sqrt{x} < 4$

x	0	16	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$	$\begin{array}{c} \downarrow \\ 4 \end{array}$		$+\infty$
	\nearrow		

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ donc :

$$\sqrt{x} < 4 \iff 0 \leq x < 16$$

5. $\sqrt{x} \leq -4$. Cette inéquation n'a pas de solution. En effet, pour tout réel x , on a $\sqrt{x} \geq 0$.
6. $\sqrt{x} \geq -1$. Cette inéquation admet tous les réels positifs comme solution. En effet, pour tout réel positif x , on a $\sqrt{x} \geq 0$.

$$\sqrt{x} \geq -1 \iff x \in \mathbb{R}_+$$

Exercice 5. Se tester : KWYK

Faire le TD 10a sur Kwyk : Fonctions carré et racine carrée.

Partie II. Fonction inverse

Exercice 6. Augmenter d'un quart

Un nombre positif augmente du quart de sa valeur.
Comment varie son inverse ?



Corrigé

Soit x un nombre positif. Si il augmente d'un quart de sa valeur (ou subit une hausse de 25%) alors il est multiplié par $\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$ et donc devient $\frac{5}{4} \times x$.

Maintenant, si on prend l'inverse de ce nouveau nombre, on obtient

$$\frac{1}{\frac{5}{4} \times x} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{x} = 0,8 \times \frac{1}{x}$$

Donc l'inverse a subi une baisse de 20%.

Exercice 7. Entiers consécutifs

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est $\frac{1}{72}$?

**Corrigé**

Soit n et $n + 1$ deux entiers naturels consécutifs non nul.

Si la différence des inverses est $\frac{1}{72}$ alors on a :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{72} \iff \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{72} \iff \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{72}$$

On doit donc résoudre l'équation pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n(n+1) = 72$$

Ce qui revient à chercher le produit de deux entiers naturels consécutifs dont le produit est 72. Les entiers 8 et 9 conviennent.

Il existe deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est $\frac{1}{72}$, ce sont 8 et 9.

Exercice 8. Équations et fonction inverse

Résoudre dans \mathbb{R}^* les équations et les inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{x} = 2$

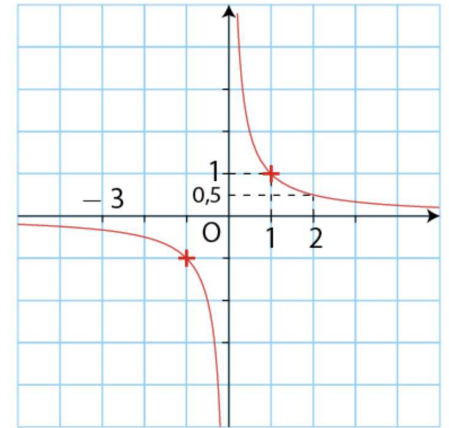
2. $\frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$

3. $\frac{1}{x} = 0$

4. $\frac{1}{x} \geq 4$

5. $\frac{1}{x} \leq -2$

6. $\frac{1}{x} \geq -3$



Corrigé

1. $\frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \iff x = -\frac{2}{3}$

3. $\frac{1}{x} = 0$. Cette équation n'admet pas de solution car la fonction inverse ne s'annule jamais sur \mathbb{R}^* .

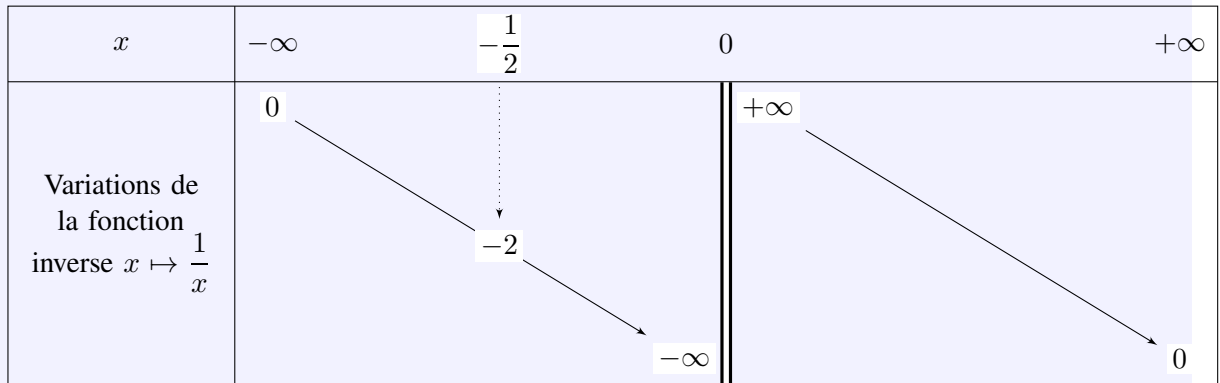
4. $\frac{1}{x} \geq 4$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Variations de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$+\infty$	4	0
	$-\infty$			

La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et négative sur \mathbb{R}_-^* donc :

$$\frac{1}{x} \geq 4 \iff x \in \left] 0 ; \frac{1}{4} \right]$$

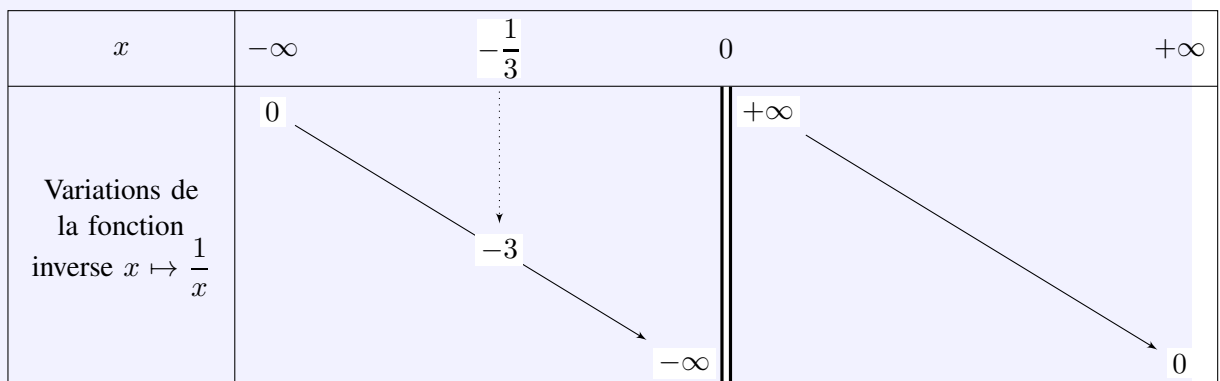
5. $\frac{1}{x} \leq -2$



La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* , positive sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ donc :

$$\frac{1}{x} \leq -2 \iff x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right[$$

6. $\frac{1}{x} \geq -3$



La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* et positive sur \mathbb{R}_+^* donc :

$$\frac{1}{x} \geq -3 \iff x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup]0; +\infty[$$

Exercice 9. Se tester : KWYK

Faire le TD 10b sur Kwyk : Fonctions inverse.

Partie III. Fonction cube

Exercice 10. Une affirmation

Sakhina prétend que, pour tout $x \leq 1$, on a $x^3 \leq x$. Êtes-vous d'accord ?



Corrigé

Propriété 1

Soit x un réel positif ou nul.

1. Si $0 < x < 1$, alors

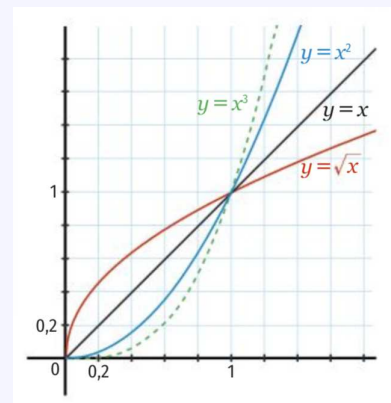
$$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$$

2. Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors

$$x^3 = x^2 = x = \sqrt{x}$$

3. Si $x > 1$, alors

$$x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$$



Donc on sait d'après le cours que si $0 \leq x \leq 1$ on a bien :

$$0 \leq x \leq 1 \implies x^3 \leq x$$

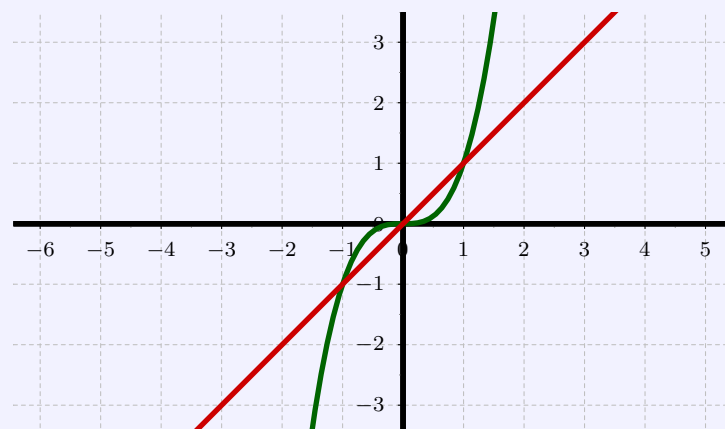
Il reste à voir le cas où x est négatif.

Alors un contre-exemple va suffire. En effet si $x = -0,5$, alors $x^3 = (-0,5)^3 = -0,125$ et alors :

$$x = -0,5 < 1 \implies x^3 = -0,125 > x = -0,5$$

Cette affirmation est fausse.

On peut le vérifier à l'aide de la calculatrice graphique :



Exercice 11. Équations et fonction cube

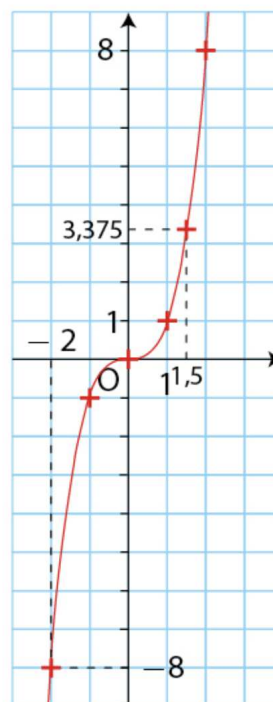
1. $x^3 = -8$

2. $x^3 = \frac{8}{27}$

3. $x^3 \geq 1$

4. $x^3 < 8$

5. $x^3 \leq -1$



Corrigé

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

1. $x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2$

2. $x^3 = \frac{8}{27} \iff x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

3. $x^3 \geq 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de la fonction cube $x \mapsto x^3$	$-\infty$	1	$+\infty$

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et $1^3 = 1$ donc

$$x^3 \geq 1 \iff x \geq 1$$

4. $x^3 < 8$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de la fonction cube $x \mapsto x^3$	$-\infty$	8	$+\infty$

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et $2^3 = 8$ donc

$$x^3 < 8 \iff x < 2 \iff x \in]-\infty ; 2[$$

5. $x^3 \leq -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de la fonction cube $x \mapsto x^3$	$-\infty$	-1	$+\infty$

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et $(-1)^3 = -1$ donc

$$x^3 \leq -1 \iff x \leq -1 \iff x \in]-\infty ; -1]$$

Exercice 12. Se tester : KWYK

Faire le TD 10c sur Kwyk : Fonctions cube.

Partie IV. Applications

Exercice 13. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$.

3. $h : x \mapsto \sqrt{8 - 2x^2}$.

4. $i : x \mapsto \frac{1}{x^3}$.



Corrigé

1. $f : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

La fonction f est définie si et seulement si :

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x}$$

On utilise alors les variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$+\infty$	1	0

- Pour tout réel $x < 0$ on a $\frac{1}{x} < 0$ et donc $\frac{1}{x} < 1$.
- Pour tout réel $x > 0$, la fonction inverse est décroissante, donc en passant à l'inverse :

$$1 \geq \frac{1}{x} > 0 \implies 1 \leq x \text{ et } x > 0$$

- Pour conclure :

$$1 \geq \frac{1}{x} \iff x \in D_f =]-\infty ; 0[\cup [1 ; +\infty[$$

2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$.

La fonction g est définie si et seulement si :

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \iff x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

donc

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$$

3. $h : x \mapsto \sqrt{8 - 2x^2}$.

La fonction h est définie si et seulement si :

$$8 - 2x^2 \geq 0 \iff 8 \geq 2x^2 \iff x^2 \leq 4$$

On utilise alors les variations de la fonction carré :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	4	0	4	$+\infty$

$$x^2 \leq 4 \iff x \in D_h = [-2 ; 2]$$

4. $i : x \mapsto \frac{1}{x^3}$.

La fonction inverse étant définie sur \mathbb{R}^* , la fonction i est définie lorsque

$$x^3 \neq 0 \iff x \neq 0$$

Donc, l'ensemble de définition de i est

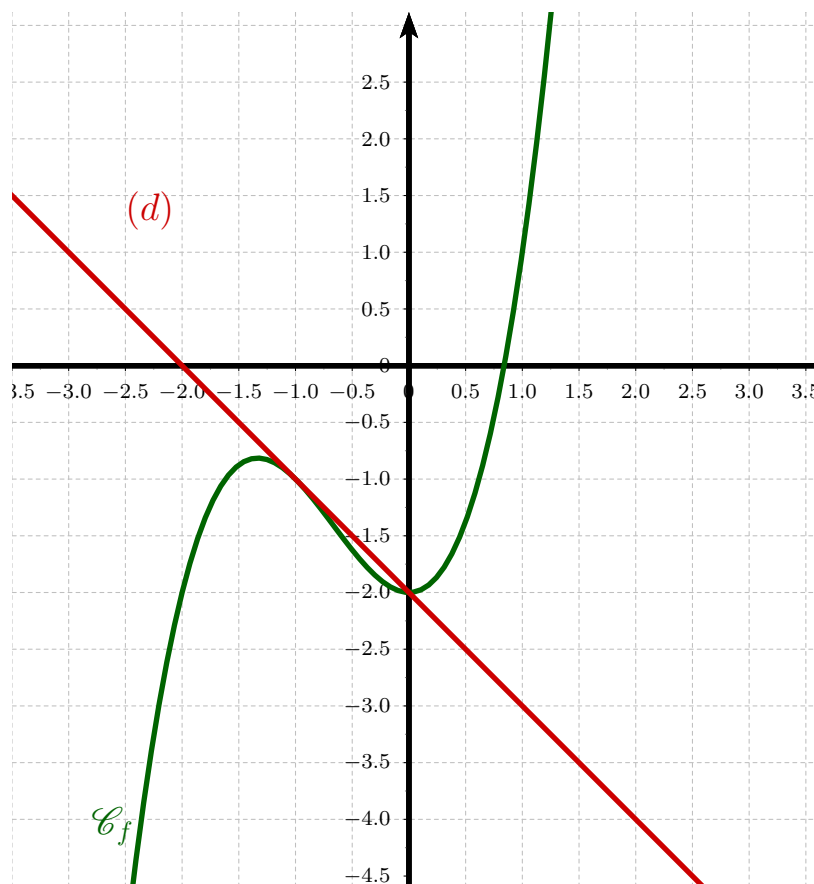
$$D_i = \mathbb{R}^*$$

Exercice 14. Étudier la position relative de deux courbes

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère (O,I,J).



1. Par lecture graphique, déterminer l'expression de la fonction affine g associée à la droite (d) tracée dans le repère ci-dessus.
2. Conjecturer la position relative de \mathcal{C}_f et (d) en fonction des valeurs de x .
3. Démontrer cette conjecture par le calcul.



Corrigé

1. Par lecture graphique, l'expression de la fonction affine g associée à la droite (d) est $g(x) = -x - 2$.
2. On peut conjecturer la position relative de \mathcal{C}_f et (d) en fonction des valeurs de x .

x	0	-1	0	$+\infty$
Position relative	\mathcal{C}_f au dessous de (d)	\mathcal{C}_f au dessous de (d)	\mathcal{C}_f au dessus de (d)	

On peut conjecturer que \mathcal{C}_f et (d) sont sécantes aux points d'abscisses -1 et 0 , que \mathcal{C}_f est en-dessous de (d) sur $] -\infty; 0]$ et \mathcal{C}_f est au-dessus de (d) sur $[0; +\infty[$.

3. Démontrons cette conjecture par le calcul.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 + 2x^2 - 2 - (-x - 2) \\ &= x^3 + 2x^2 + x \\ &= x(x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) - g(x) = x(x + 1)^2}$$

On étudie alors le signe de chaque facteur pour faire un tableau de signe :

- Pour tout réel x , on a $(x + 1)^2 \geq 0$ et

$$(x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$$

- Pour tout réel x , l'étude du signe du facteur x est triviale :
- On obtient :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
signe de $(x + 1)^2$	+	+	+	+
signe de x	-	-	0	+
signe de $f(x) - g(x) = x(x + 1)^2$	-	0	0	+
Position	\mathcal{C}_f au dessous de (d)		\mathcal{C}_f au dessous de (d)	\mathcal{C}_f au dessus de (d)

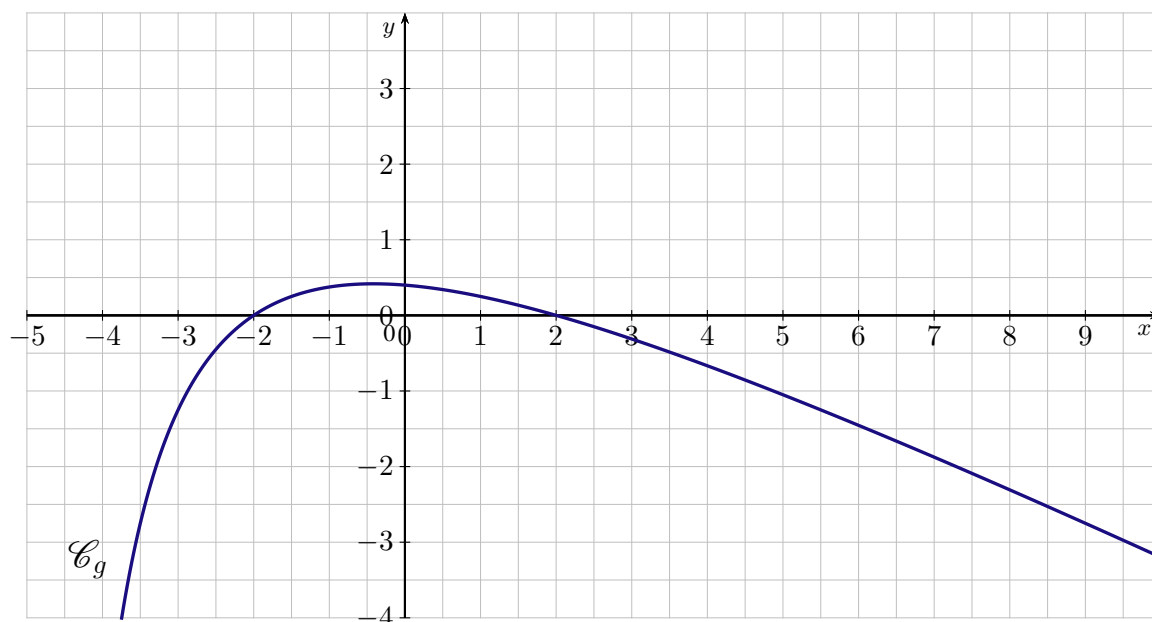
Partie V. Bilan

Exercice 15. (c) Étude de Fonctions

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$ et dont la courbe représentative notée \mathcal{C}_g est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$$g(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 10}$$



1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g .
2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} et telle que : $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$.

1. Donner une expression de $f(x)$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$:

$$f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g
3.
 3. a. Étudier le signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, à l'aide d'un tableau.
 3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
 3. c. En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 16. Étude et intersections

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 7}{x + 4}$.

1.

1. a. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$, $f(x) = 3 - \frac{5}{x + 4}$.

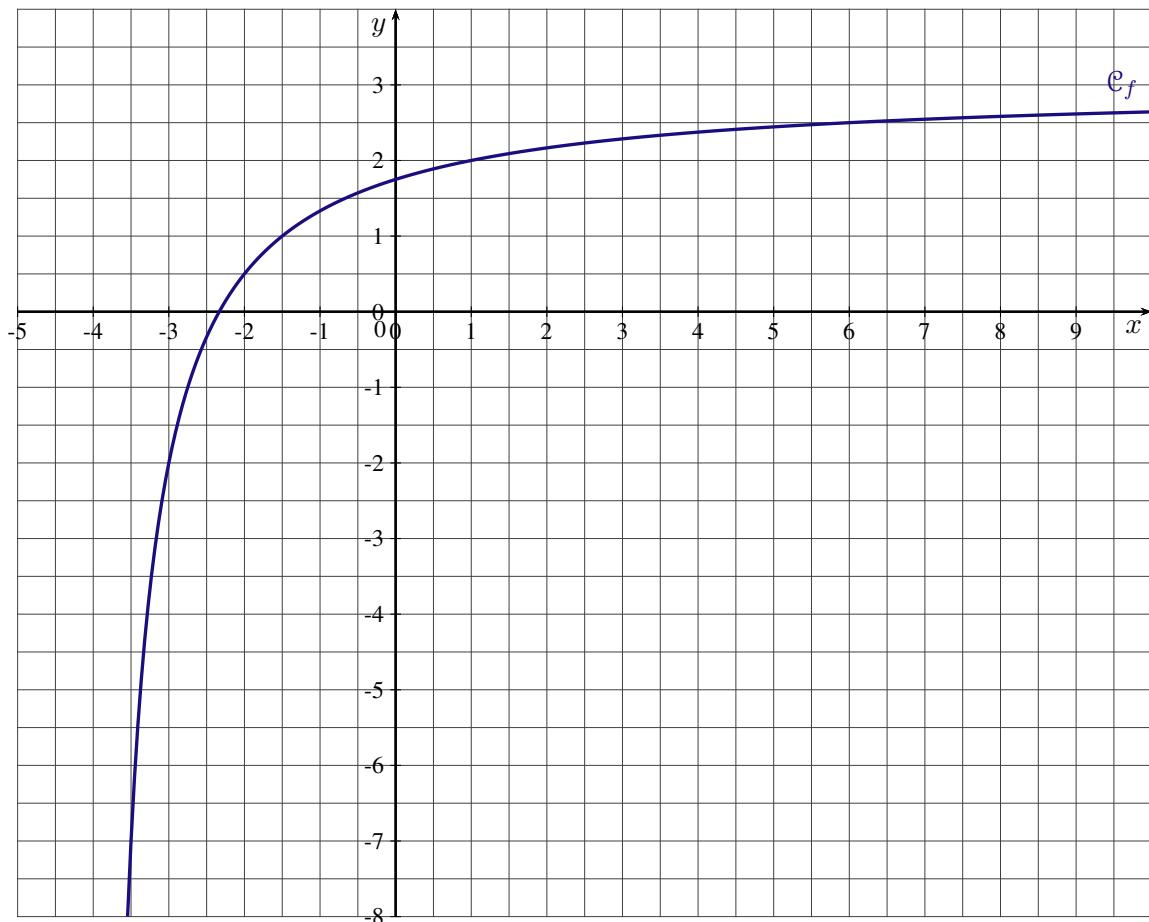
1. b. Étudier les variations de la fonction f .

2. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.

3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = x - 3,5$.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f , tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le même repère.



4.

4. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) - f(x) = \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{361}{16}}{x + 4}$$

4. b. Étudier le signe de $g(x) - f(x)$.

En déduire les positions relatives des courbes \mathcal{C}_f et D .



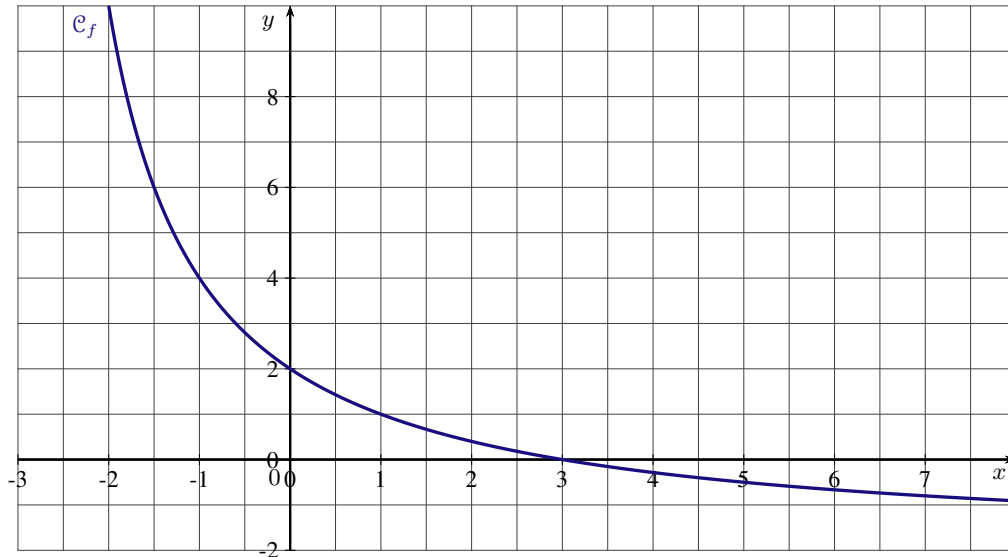
Corrigé

Exercice 17. Avec une intersection

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6 - 2x}{x + 3}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq -\frac{3}{2}$.
3. **3. a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -3 ; +\infty[$ on a :

$$f(x) - x = \frac{\frac{49}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{x + 3}$$

- 3. b.** En déduire les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe \mathcal{C}_f avec la droite D d'équation $y = x$.



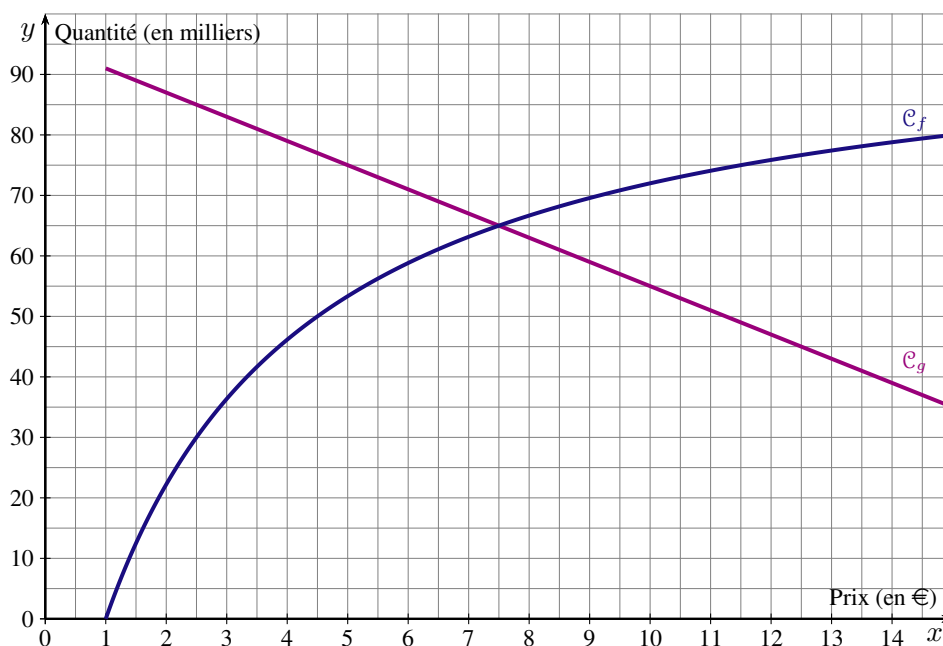
Corrigé

Exercice 18. L'offre et la demande

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.

Une étude de marché a permis d'établir que les fonctions f et g représentées ci-dessous, modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros ;
- $g(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.

**PARTIE A : Lecture graphique**

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 2,50 €. Comparer l'offre et la demande pour ce prix de vente.
2. Déterminer le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000. Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée. Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

PARTIE B : La fonction demande

La demande des consommateurs est modélisée par la fonction affine g définie sur l'intervalle $[1 ; p]$ telle que $g(5) = 75$ et $g(10) = 55$.

1. Déterminer l'expression de g en fonction de x .
2. Déterminer le prix de vente p d'un article pour lequel la demande est nulle.

PARTIE C : La fonction d'offre

L'offre des producteurs est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 100 - \frac{700}{2x + 5}$$

1. Soit a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Selon ce modèle, est-il possible que l'offre des producteurs soit de 100 milliers d'articles ?

PARTIE D : Le prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est le réel $x \geq 1$ solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Vérifier que $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 15)(4x + 45)}{2x + 5}$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

En déduire le nombre d'articles échangés au prix d'équilibre.



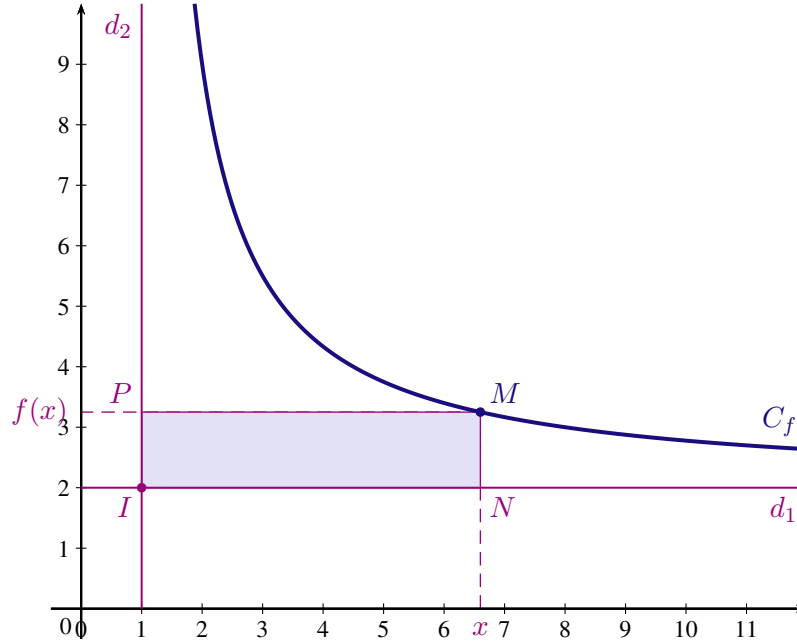
Corrigé

Exercice 19. Aire sous une courbe

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$. Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Les droites d_1 et d_2 sont les parallèles aux axes du repère passant par le point I de coordonnées $(1 ; 2)$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]1 ; +\infty[$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et on construit le rectangle $INMP$ comme indiqué ci-dessous.



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$, $f(x) > 2$.
2.
 2. a. Exprimer en fonction de x , les distances IN et MN .
 2. b. Montrer que pour tout point M de la courbe C_f , l'aire du rectangle $INMP$ est constante.
3. On veut déterminer les coordonnées du point M de la courbe C_f pour que le rectangle $INMP$ soit un carré.
 3. a. Montrer que l'abscisse du point M est solution de l'équation $\frac{(x-1)^2 - 7}{x-1} = 0$.
 3. b. Calculer les coordonnées du point M .



Corrigé

Exercice 20. Fonction homographique, affine et position relative

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
2.
 2. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$
 2. b. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty ; -2[$. Donner le tableau de variations de la fonction f .
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(3) = 1$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
4.
 4. a. Montrer pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - g(x) = \frac{x - x^2}{x + 2}$.
 4. b. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

**Corrigé**

Partie VI. Correction



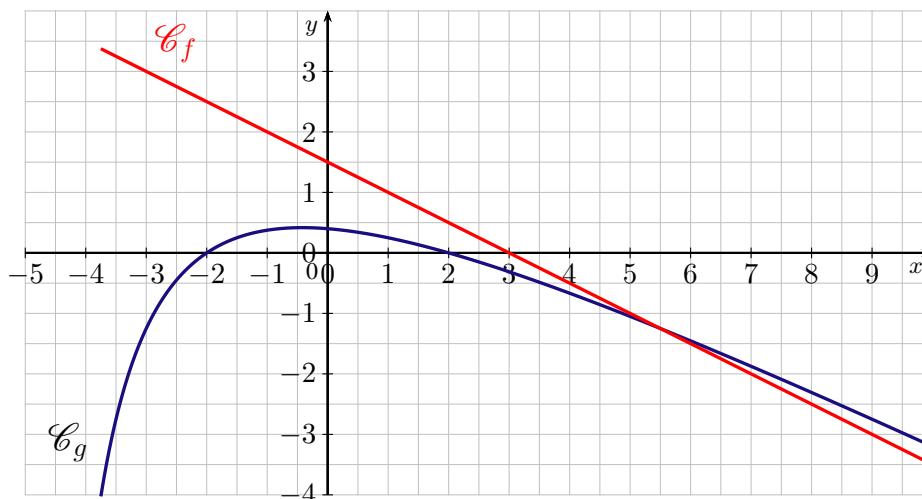
Correction

La correction du TD est disponible sur cette page : www.math93.com

Correction de l'exercice 15

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$ et dont la courbe représentative notée \mathcal{C}_g est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé : $g(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 10}$.



1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g .

x	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
Variations de g					

2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Notons que la valeur interdite de la fonction g est (-5) donc sur son intervalle de définition $] -5 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_g avec l'axe des abscisses sont 2 et (-2) .

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} et telle que : $f(3) = 0$ et $f(-1) = 2$.

1. Donner une expression de $f(x)$.

la fonction f est affine donc de la forme $f(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2}{5} = -0,5$$

On obtient facilement : $f(x) = -0,5x + 1,5$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?

Le coefficient directeur $m = -0,5$ étant négatif, la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .

3. Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$: $f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$.

Pour tout réel x de $] -5 ; +\infty[$, on a $2x + 10 \neq -5$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -0,5x + 1,5 - \frac{4 - x^2}{2x + 10} \\ &= \frac{(-0,5x + 1,5)(2x + 10) - 4 + x^2}{2x + 10} \\ f(x) - g(x) &= \frac{11 - 2x}{2x + 10} \end{aligned}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g

Les abscisses des point d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{11 - 2x}{2x + 10} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 11 - 2x = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \\ &\iff \underline{x = 5,5} \end{aligned}$$

Or on a :

$$g(5,5) = f(5,5) = -0,5 \times 5,5 + 1,5 = -1,25 = -\frac{5}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g sont donc $(5,5 ; f(5,5))$ soit $(5,5 ; -\frac{5}{4})$.

3.

3. a. Étudier le signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, à l'aide d'un tableau.

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 - 2x = 0 \iff x = \frac{11}{2} \\ 11 - 2x < 0 \iff x > \frac{11}{2} \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 10 = 0 \iff x = -5 \\ 2x + 10 < 0 \iff x < -5 \end{array} \right. \right.$$

x	-5	$\frac{11}{2}$	$+\infty$
Signe de $11 - 2x$		+	0 -
Signe de $2x + 10$	0	+	+
Signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$		+	0 -

L'expression $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ est donc positive (ou nulle) sur l'intervalle $]-5; \frac{11}{2}]$ et négative (ou nulle) sur l'intervalle $[\frac{11}{2}; +\infty[$.

3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

$$f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0 \iff \frac{11 - 2x}{2x + 10} \geq 0$$

Donc d'après l'étude menée lors de la question **3.a**.

$$S =]-5; \frac{11}{2}]$$

3. c. En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

La courbe \mathcal{C}_f est donc au dessus de la courbe \mathcal{C}_g sur l'intervalle $]-5; \frac{11}{2}]$ et au-dessous sinon.