



TD 1 - Seconde

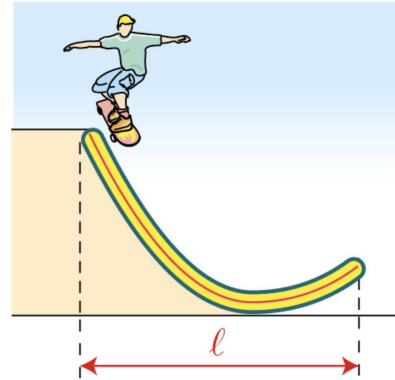
Fonctions de référence

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Partie I. Fonctions carré et racine carrée

Exercice 1. Un tremplin

Ce tremplin a la forme de la parabole représentative de la fonction carré dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre. Il est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre. Calculer sa largeur ℓ en m. Arrondir au dixième.



Exercice 2. Un encadrement (ex. 28,29,30)

x est un nombre réel tel que $-2 \leq x \leq 3$. À l'aide des variations de la fonction carré, on souhaite déterminer un encadrement pour x

1. Première méthode : sans tableau de variations.

1. a. On suppose que $x \leq 0$. Montrer en justifiant que $0 \leq x^2 \leq 4$.

1. b. On suppose que $x \geq 0$. Montrer en justifiant que $0 \leq x^2 \leq 9$.

1. c. En déduire un encadrement de x^2 quand $-2 \leq x \leq 3$.

2. Seconde méthode : avec tableau de variations.

2. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction carré sur $[-2 ; 3]$.

2. b. En déduire un encadrement de x^2 quand $-2 \leq x \leq 3$.

3. En utilisant la méthode de votre choix, donner un encadrement de x^2 sachant que :

3. a. $-10 \leq x \leq -5$;

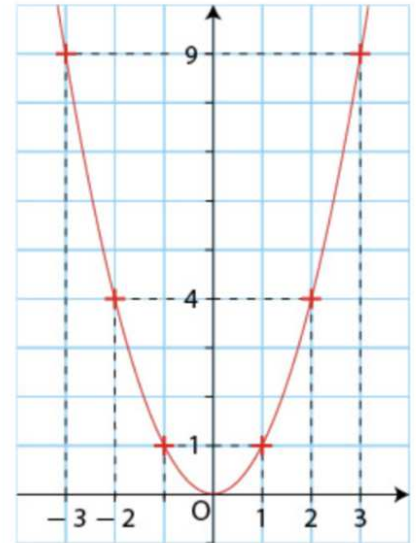
3. b. $3 \leq x \leq 4$;

3. c. $-10 \leq x \leq 5$;

Exercice 3. Équations, inéquations et fonction carré**Équations $x^2 = a$**

Soit a un paramètre réel. On considère l'équation $x^2 = a$.

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} .
- Si $a = 0$, l'équation a une unique solution 0.
- Si $a > 0$, l'équation a deux solutions réelles qui sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.



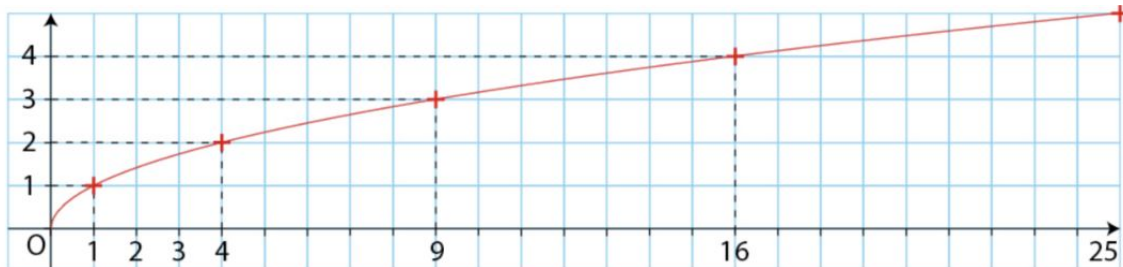
Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------|------------------|
| 1. $x^2 = 9$ | 4. $x^2 \leq 4$ |
| 2. $x^2 = -3$ | 5. $x^2 \leq -2$ |
| 3. $x^2 = \pi$ | 6. $x^2 > 1$ |

Exercice 4. Équations et fonction racine carrée

Résoudre dans \mathbb{R}_+ les équations et les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. $\sqrt{x} = 2$ | 4. $\sqrt{x} < 4$ |
| 2. $\sqrt{x} = 0,5$ | 5. $\sqrt{x} \leq -4$ |
| 3. $\sqrt{x} \geq 2$ | 6. $\sqrt{x} \geq -1$ |

**Exercice 5. Se tester : KWYK**

Faire le TD 10a sur Kwyk : Fonctions carré et racine carrée.

Partie II. Fonction inverse

Exercice 6. Augmenter d'un quart

Un nombre positif augmente du quart de sa valeur.
Comment varie son inverse ?

Exercice 7. Entiers consécutifs

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est $\frac{1}{72}$?

Exercice 8. Équations et fonction inverse

Résoudre dans \mathbb{R}^* les équations et les inéquations suivantes :

$$1. \frac{1}{x} = 2$$

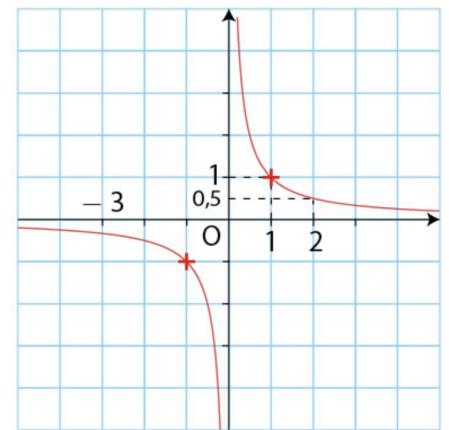
$$2. \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$$

$$3. \frac{1}{x} = 0$$

$$4. \frac{1}{x} \geq 4$$

$$5. \frac{1}{x} \leq -2$$

$$6. \frac{1}{x} \geq -3$$



Exercice 9. Se tester : KWYK

Faire le TD 10b sur Kwyk : Fonctions inverse.

Partie III. Fonction cube

Exercice 10. Une affirmation

Sakhina prétend que, pour tout $x \leq 1$, on a $x^3 \leq x$. Êtes-vous d'accord ?

Exercice 11. Équations et fonction cube

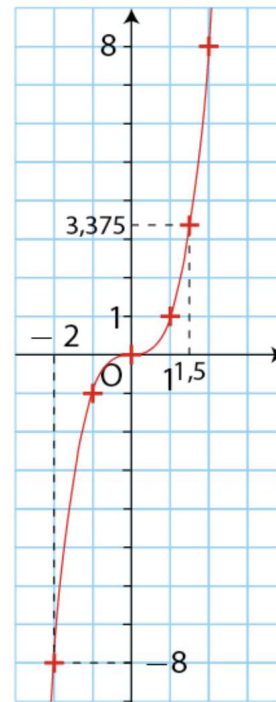
1. $x^3 = -8$

2. $x^3 = \frac{8}{27}$

3. $x^3 \geq 1$

4. $x^3 < 8$

5. $x^3 \leq -1$



Exercice 12. Se tester : KWYK

Faire le TD 10c sur Kwyk : Fonctions cube.

Partie IV. Applications

Exercice 13. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$$1. f : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

$$2. g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}.$$

$$3. h : x \mapsto \sqrt{8 - 2x^2}.$$

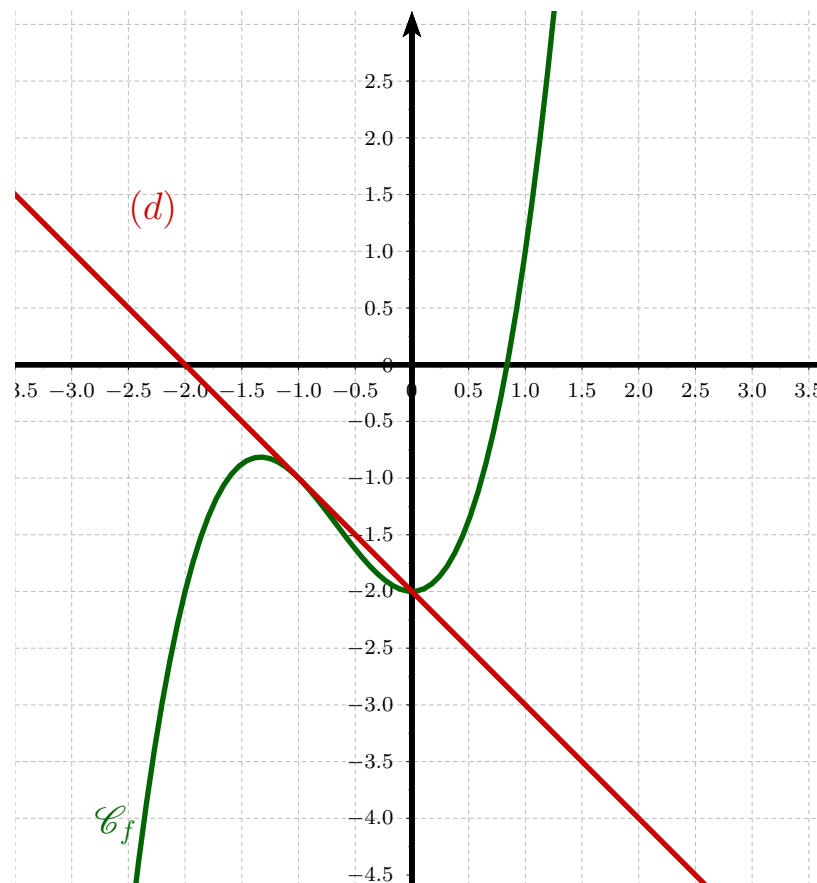
$$4. i : x \mapsto \frac{1}{x^3}.$$

Exercice 14. Étudier la position relative de deux courbes

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère (O,I,J).



1. Par lecture graphique, déterminer l'expression de la fonction affine g associée à la droite (d) tracée dans le repère ci-dessus.
2. Conjecturer la position relative de \mathcal{C}_f et (d) en fonction des valeurs de x .
3. Démontrer cette conjecture par le calcul.

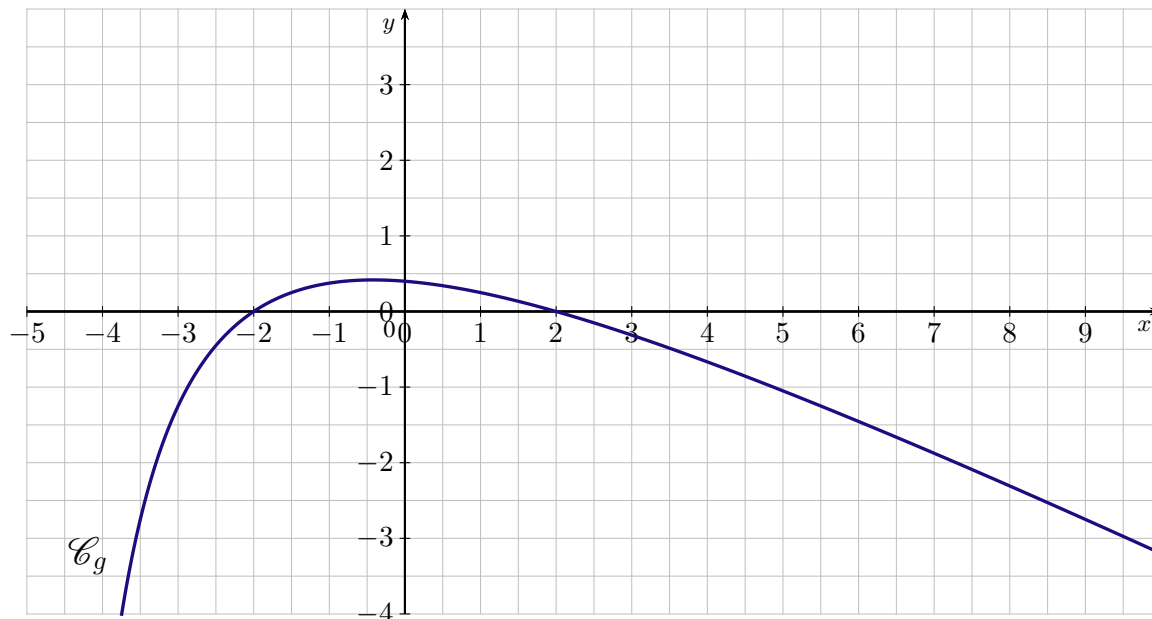
Partie V. Bilan

Exercice 15. (c) Étude de Fonctions

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] - 5 ; +\infty[$ et dont la courbe représentative notée \mathcal{C}_g est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$$g(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 10}$$



1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g .
2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} et telle que : $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$.

1. Donner une expression de $f(x)$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $] - 5 ; +\infty[$:

$$f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g
3.
 3. a. Étudier le signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ sur l'intervalle $] - 5 ; +\infty[$, à l'aide d'un tableau.
 3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
 3. c. En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 16. Étude et intersections

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 7}{x + 4}$.

1.

1. a. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$, $f(x) = 3 - \frac{5}{x + 4}$.

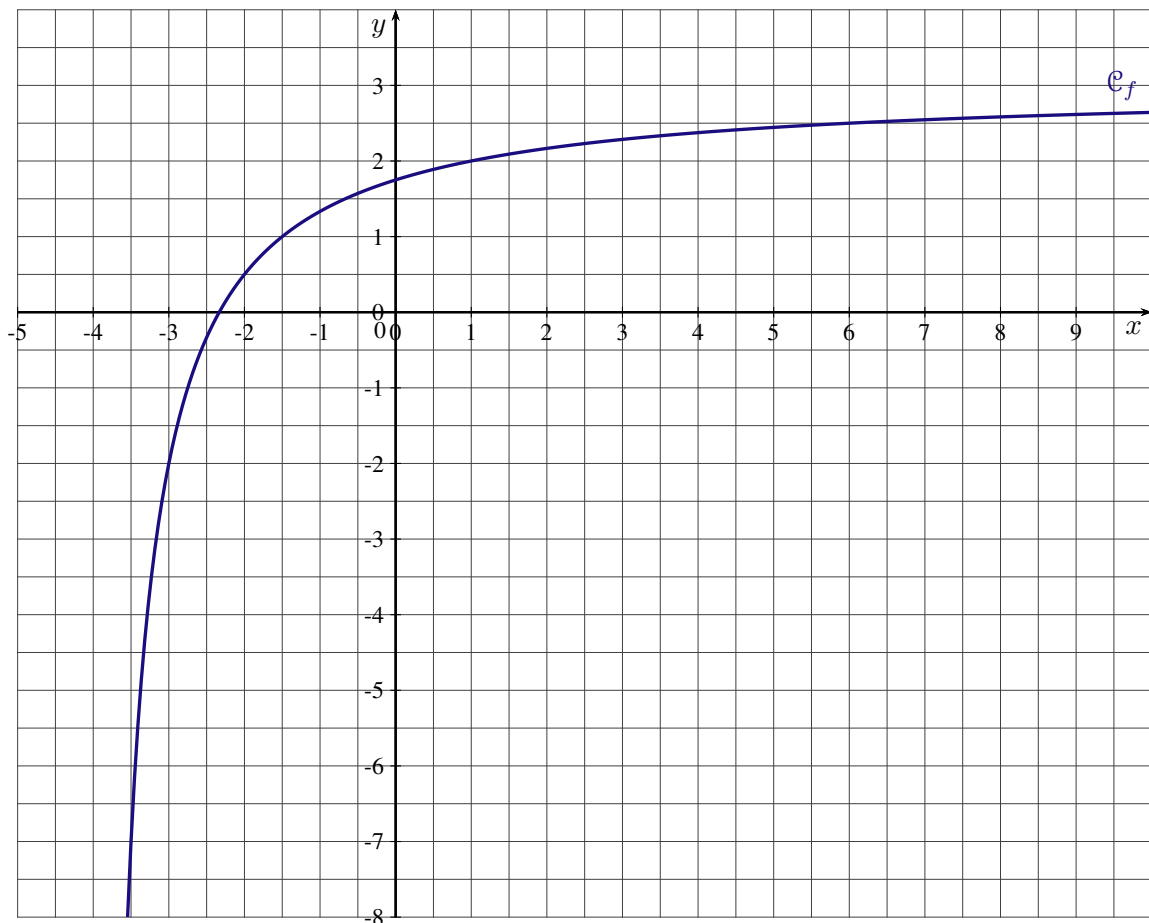
1. b. Étudier les variations de la fonction f .

2. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.

3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = x - 3,5$.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f , tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le même repère.



4.

4. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -4 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) - f(x) = \frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{361}{16}}{x + 4}$$

4. b. Étudier le signe de $g(x) - f(x)$.

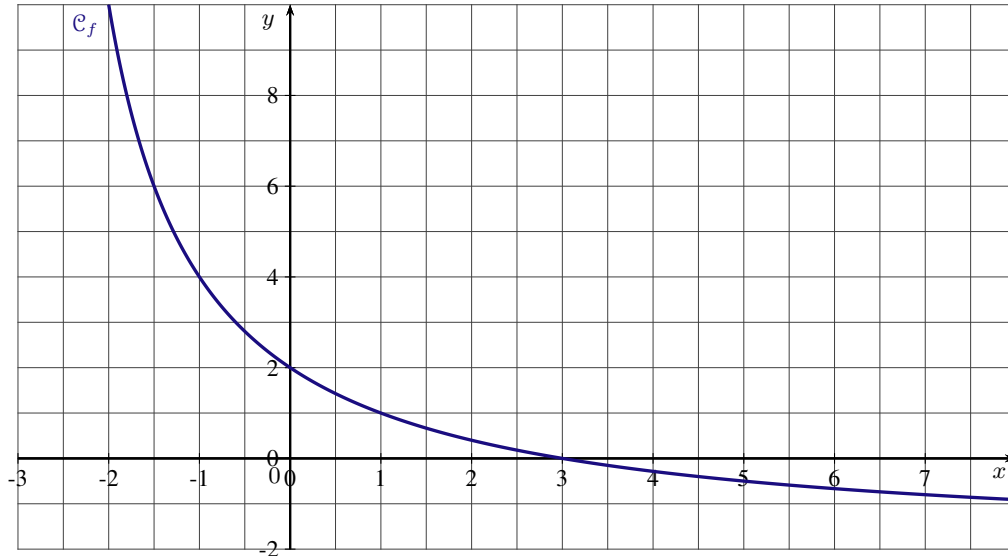
En déduire les positions relatives des courbes \mathcal{C}_f et D .

Exercice 17. Avec une intersection

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6 - 2x}{x + 3}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq -\frac{3}{2}$.

3. 3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -3 ; +\infty[$ on a :

$$f(x) - x = \frac{\frac{49}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{x + 3}$$

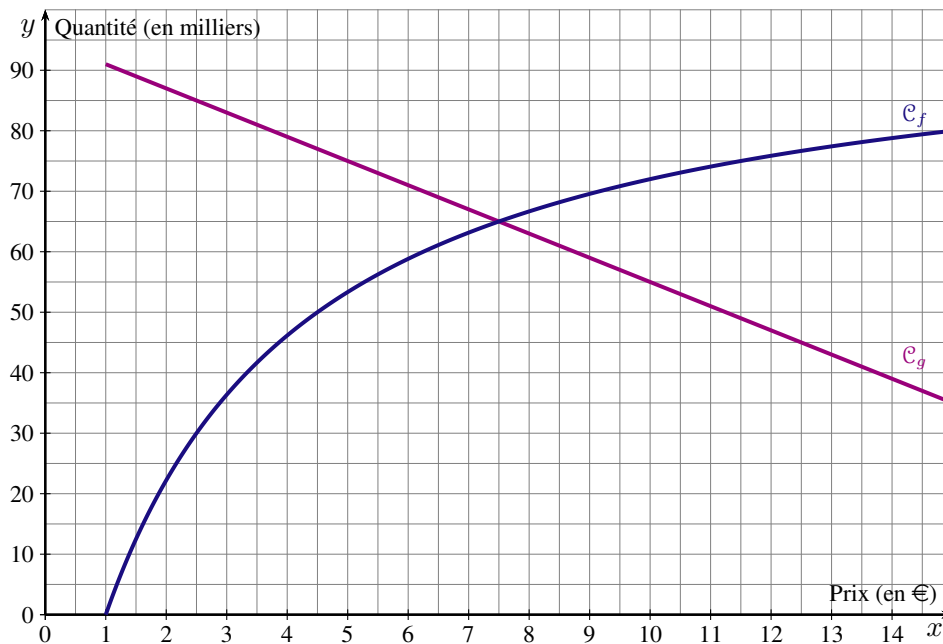
3. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe \mathcal{C}_f avec la droite D d'équation $y = x$.

Exercice 18. L'offre et la demande

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.

Une étude de marché a permis d'établir que les fonctions f et g représentées ci-dessous, modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

- $f(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros ;
- $g(x)$ est la quantité, en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.

**PARTIE A : Lecture graphique**

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 2,50 €. Comparer l'offre et la demande pour ce prix de vente.
2. Déterminer le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 75 000. Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée. Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

PARTIE B : La fonction demande

La demande des consommateurs est modélisée par la fonction affine g définie sur l'intervalle $[1 ; p]$ telle que $g(5) = 75$ et $g(10) = 55$.

1. Déterminer l'expression de g en fonction de x .
2. Déterminer le prix de vente p d'un article pour lequel la demande est nulle.

PARTIE C : La fonction d'offre

L'offre des producteurs est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 100 - \frac{700}{2x + 5}$$

1. Soit a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Selon ce modèle, est-il possible que l'offre des producteurs soit de 100 milliers d'articles ?

PARTIE D : Le prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est le réel $x \geq 1$ solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Vérifier que $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 15)(4x + 45)}{2x + 5}$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

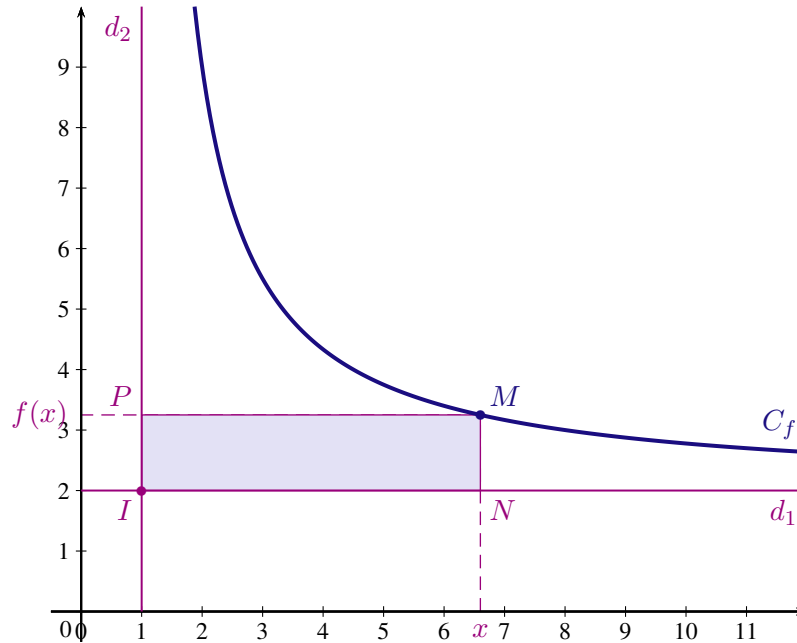
En déduire le nombre d'articles échangés au prix d'équilibre.

Exercice 19. Aire sous une courbe

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$. Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Les droites d_1 et d_2 sont les parallèles aux axes du repère passant par le point I de coordonnées $(1 ; 2)$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]1 ; +\infty[$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et on construit le rectangle $INMP$ comme indiqué ci-dessous.



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$, $f(x) > 2$.
2.
 2. a. Exprimer en fonction de x , les distances IN et MN .
 2. b. Montrer que pour tout point M de la courbe C_f , l'aire du rectangle $INMP$ est constante.
3. On veut déterminer les coordonnées du point M de la courbe C_f pour que le rectangle $INMP$ soit un carré.
 3. a. Montrer que l'abscisse du point M est solution de l'équation $\frac{(x - 1)^2 - 7}{x - 1} = 0$.
 3. b. Calculer les coordonnées du point M .

Exercice 20. Fonction homographique, affine et position relative

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
2.
 2. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$
 2. b. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty ; -2[$. Donner le tableau de variations de la fonction f .
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(3) = 1$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
4.
 4. a. Montrer pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - g(x) = \frac{x - x^2}{x + 2}$.
 4. b. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Partie VI. Correction



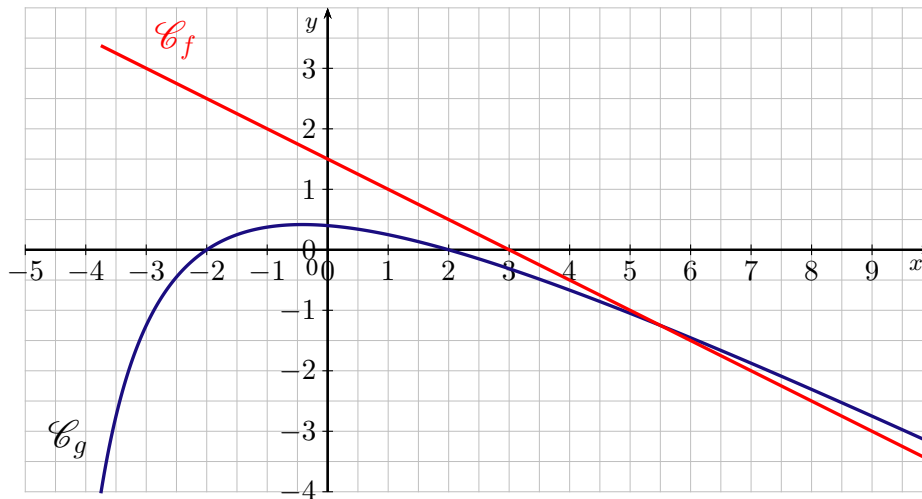
Correction

La correction du TD est disponible sur cette page : www.math93.com

Correction de l'exercice 15

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$ et dont la courbe représentative notée \mathcal{C}_g est tracée sur l'annexe dans le plan muni d'un repère orthonormé : $g(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 10}$.



1. Par lecture graphique et sans justification, donner le tableau de variations de la fonction g .

x	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
Variations de g	$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array}$		$\begin{array}{c} \vdots \\ 0.4 \end{array}$	$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array}$	

2. Résoudre algébriquement l'équation $g(x) = 0$ et interpréter ce résultat graphiquement.

Notons que la valeur interdite de la fonction g est (-5) donc sur son intervalle de définition $] -5 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) = 0 \iff \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_g avec l'axe des abscisses sont 2 et (-2) .

Partie B

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} et telle que : $f(3) = 0$ et $f(-1) = 2$.

1. Donner une expression de $f(x)$.

la fonction f est affine donc de la forme $f(x) = mx + p$ avec :

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2}{5} = -0,5$$

On obtient facilement : $f(x) = -0,5x + 1,5$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?

Le coefficient directeur $m = -0,5$ étant négatif, la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .

3. Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe.

Partie C

1. Vérifier que sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$: $f(x) - g(x) = \frac{11 - 2x}{2x + 10}$.

Pour tout réel x de $] -5 ; +\infty[$, on a $2x + 10 \neq -5$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -0,5x + 1,5 - \frac{4 - x^2}{2x + 10} \\ &= \frac{(-0,5x + 1,5)(2x + 10) - 4 + x^2}{2x + 10} \\ f(x) - g(x) &= \frac{11 - 2x}{2x + 10} \end{aligned}$$

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g

Les abscisses des point d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{11 - 2x}{2x + 10} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 11 - 2x = 0 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases} \\ &\iff \underline{x = 5,5} \end{aligned}$$

Or on a :

$$g(5,5) = f(5,5) = -0,5 \times 5,5 + 1,5 = -1,25 = -\frac{5}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la droite \mathcal{C}_f avec la courbe \mathcal{C}_g sont donc $(5,5 ; f(5,5))$ soit $(5,5 ; -\frac{5}{4})$.

3.

3. a. Étudier le signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, à l'aide d'un tableau.

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 - 2x = 0 \iff x = \frac{11}{2} \\ 11 - 2x < 0 \iff x > \frac{11}{2} \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 10 = 0 \iff x = -5 \\ 2x + 10 < 0 \iff x < -5 \end{array} \right. \right.$$

x	-5	$\frac{11}{2}$	$+\infty$
Signe de $11 - 2x$		+	-
Signe de $2x + 10$	0	+	+
Signe de $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$		+	-

L'expression $\frac{11 - 2x}{2x + 10}$ est donc positive (ou nulle) sur l'intervalle $] -5 ; \frac{11}{2}]$ et négative (ou nulle) sur l'intervalle $[\frac{11}{2} ; +\infty[$.

3. b. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

$$f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0 \iff \frac{11 - 2x}{2x + 10} \geq 0$$

Donc d'après l'étude menée lors de la question **3.a**.

$$S = \left] -5; \frac{11}{2} \right]$$

3. c. En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

La courbe \mathcal{C}_f est donc au dessus de la courbe \mathcal{C}_g sur l'intervalle $\left] -5; \frac{11}{2} \right]$ et au-dessous sinon.