



## TD 2 - Seconde

### Fonctions de références - Variations

#### Exemple 1

Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x-2)(3-5x) + 4(-2+x)^2$

1. Montrer que pour tout réel  $x$  :  $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$ .
2. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty ; -1,5]$ .
3. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-1,5 ; +\infty[$ .
4. Dresser alors le tableau de variations de la fonction  $f$ .

#### Correction

##### 1. Développons les deux expressions.

D'une part on a :

$$f(x) = (x-2)(3-5x) + 4(-2+x)^2 = \underline{-x^2 - 3x + 10}$$

D'une part on a :

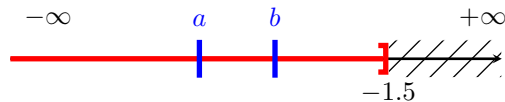
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} = \underline{-x^2 - 3x + 10}$$

Ainsi pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

##### 2. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $]-\infty ; -1,5]$ .

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]-\infty ; -1,5]$ .



$$a \leq b \leq -1,5$$

$a + 1,5 \leq b + 1,5 \leq 0$  : On a ajouté 1,5 à chaque membre ;

$(a + 1,5)^2 \geq (b + 1,5)^2$  : On a composé par la fonction carrée décroissante sur  $]-\infty ; 0]$ , l'ordre change ;

$-(a + 1,5)^2 \leq -(b + 1,5)^2$  : On a multiplié par  $-1 < 0$ , l'ordre change ;

$$\underbrace{-(a + 1,5)^2 + \frac{49}{4}}_{f(a)} \leq \underbrace{-(b + 1,5)^2 + \frac{49}{4}}_{f(b)} : \text{On a ajouté } \frac{49}{4} \text{ à chaque membre ;}$$

$$f(a) \leq f(b)$$

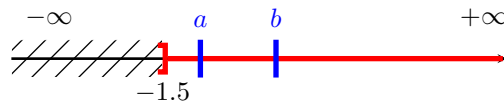
On vient de prouver que :

$$a \leq b \leq -1,5 \implies f(a) \leq f(b)$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur l'intervalle  $]-\infty ; -1,5]$ .

**3. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-1,5 ; +\infty[$ .**

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $[-1,5 ; +\infty[$ .



$$-1,5 \leq a \leq b$$

$0 \leq a + 1,5 \leq b + 1,5$  : On ajoute 1,5 à chaque membre ;

$(a + 1,5)^2 \leq (b + 1,5)^2$  : On compose par la fonction carrée croissante sur  $[0 ; +\infty[$ , l'ordre est inchangé ;

$-(a + 1,5)^2 \geq -(b + 1,5)^2$  : On multiplie par  $-1 < 0$ , l'ordre change ;

$-(a + 1,5)^2 + \frac{49}{4} \geq -(b + 1,5)^2 + \frac{49}{4}$  : On ajoute  $\frac{49}{4}$  à chaque membre ;

$$\underbrace{-(a + 1,5)^2 + \frac{49}{4}}_{f(a)} \geq \underbrace{-(b + 1,5)^2 + \frac{49}{4}}_{f(b)}$$

$$f(a) \geq f(b)$$

On vient de prouver que :

$$-1,5 \leq a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$

La fonction  $f$  est donc décroissante sur l'intervalle  $[-1,5 ; +\infty[$ .

**4. Dresser alors le tableau de variations de la fonction  $f$ .**

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de $f$	$\nearrow$		$\searrow$

**Exercice 1. Suivez le modèle : Fonction carrée**

1. Soit une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 5(x - 2)^2 + 3$$

1. a. Étudier les variations de  $g$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 2]$  puis sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ .

1. b. Dresser alors le tableau de variations de la fonction  $g$ .

2. Soit une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = -3(x + 5)^2 - 1$$

2. a. Étudier les variations de  $h$  sur l'intervalle  $]-\infty ; -5]$  puis sur l'intervalle  $[-5 ; +\infty[$ .

2. b. Dresser alors le tableau de variations de la fonction  $h$ .

3. Soit une fonction  $j$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$j(x) = -2x^2 + 4x - 9$$

3. a. Montrer que pour tous les réels  $x$  on a  $j(x) = -2(x - 1)^2 - 7$

3. b. Étudier les variations de  $j$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 1]$  puis sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

3. c. Dresser alors le tableau de variations de la fonction  $j$ .

3. d. Avec le tableau de variation, déterminer l'extremum de  $j(x)$  et la valeur pour laquelle il est atteint.

**Exercice 2. Un peu d'initiative : Fonction du second degré (c)**

Étudier les fonctions suivantes :

1.  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_1(x) = -3(-x + 3)^2 - 2$$

2.  $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_2(x) = 7(x - 3)^2 + 9$$

3.  $f_3$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_3(x) = -2(-x - 3)^2 + 9x - 5$$

## Correction des exercices

### Correction de l'exercice 2 page 2

1.  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

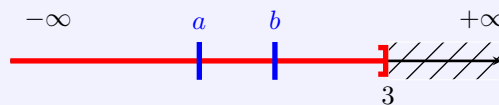
$$f_1(x) = -3(-x + 3)^2 - 2$$



#### Corrigé

• Étudions les variations de  $f_1$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 3]$ .

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]-\infty ; 3]$ .



$$a \leq b \leq 3$$

$a - 3 \leq b - 3 \leq 0$  : On a soustrait 3 à chaque membre ;

$-a + 3 \geq -b + 3 \geq 0$  : On multiplie chaque membre par  $(-1) < 0$  ;

$(-a + 3)^2 \geq (-b + 3)^2$  : On a composé par la fonction carrée croissante sur  $[0 ; +\infty[$ , ordre inchangé ;

$-3(-a + 3)^2 \leq -3(-b + 3)^2$  : On a multiplié par  $-3 < 0$ , l'ordre change ;

$\underbrace{-3(-a + 3)^2 - 2}_{f(a)} \leq \underbrace{-3(-b + 3)^2 - 2}_{f(b)}$  : On a ajouté  $(-2)$  à chaque membre ;

$$f(a) \leq f(b)$$

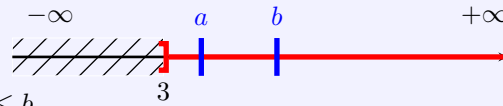
On vient de prouver que :

$$a \leq b \leq 3 \implies f(a) \leq f(b)$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur l'intervalle  $]-\infty ; 3]$ .

- Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[3; +\infty[$ .

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $[3; +\infty[$ .



$$3 \leq a \leq b$$

$0 \leq a - 3 \leq b - 3$  : On a soustrait 3 à chaque membre ;

$0 \geq -a + 3 \geq -b + 3$  : On multiplie chaque membre par  $(-1) < 0$  ;

$(-a + 3)^2 \leq (-b + 3)^2$  : On a composé par la fonction carrée décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ , ordre changé

$-3(-a + 3)^2 \geq -3(-b + 3)^2$  : On a multiplié par  $-3 < 0$ , l'ordre change ;

$$\underbrace{-3(-a + 3)^2 - 2}_{f(a)} \geq \underbrace{-3(-b + 3)^2 - 2}_{f(b)} \quad \text{: On a ajouté } (-2) \text{ à chaque membre ;}$$

$$f(a) \geq f(b)$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{3 \leq a \leq b \implies f(a) \geq f(b)}$$

La fonction  $f$  est donc décroissante sur l'intervalle  $[3; +\infty[$ .

- On conclut donc les variations de  $f_1$  en calculant l'image de 3 soit  $f_1(3) = -2$  puisque :

$$f_1(x) = -3(-x + 3)^2 - 2$$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
Variations de $f_1$			

On sait donc aussi que le maximum de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$  est  $(-2)$  et qu'il est atteint pour  $x = 3$ .

2.  $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_2(x) = 7(x - 3)^2 + 9$$



### Corrigé

On propose ici une autre méthode pour changer.

On va étudier le signe de  $f_2(b) - f_2(a)$  en partant du fait que  $a < b$ .

$$\begin{aligned} f_2(b) - f_2(a) &= 7(b - 3)^2 + 9 - (7(a - 3)^2 + 9) \\ &= 7(b - 3)^2 - 7(a - 3)^2 \\ &= 7((b - 3)^2 - (a - 3)^2) \\ &= 7(b - 3 - (a - 3))(b - 3 + (a - 3)) \\ f_2(b) - f_2(a) &= 7(b - a)(b + a - 6) \end{aligned}$$

Donc on a exprimé  $f_2(b) - f_2(a)$  sous la forme d'un produit de 3 facteurs :

$$\boxed{f_2(b) - f_2(a) = 7(b - a)(b + a - 6)}$$

- D'une part dans ce produit, si  $a < b$  alors le facteur  $7(b - a)$  est strictement positif, donc  $f_2(b) - f_2(a)$  est du signe du facteur  $(b + a - 6)$ .
- D'autre part :

- Sur l'intervalle  $] -\infty ; 3]$  alors si

$$a < b \leq 3 \implies (a + b) \leq 6 \implies (b + a - 6) \leq 0$$

De ce fait :

$$a < b \leq 3 \implies f_2(b) - f_2(a) \leq 0$$

La fonction  $f_2$  est donc décroissante sur  $] -\infty ; 3]$ .

- Sur l'intervalle  $[3 ; +\infty[$  alors si

$$3 \leq a < b \implies (a + b) \geq 6 \implies (b + a - 6) \geq 0$$

De ce fait :

$$3 \leq a < b \implies f_2(b) - f_2(a) \geq 0$$

La fonction  $f_2$  est donc croissante sur  $[3 ; +\infty[$ .

- On peut alors déterminer le tableau de variation de  $f_2$  en calculant l'image de 3 soit  $f_2(3) = 9$  puisque :

$$f_2(x) = 7(x - 3)^2 + 9$$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
Variations de $f_1$			

- On sait donc aussi que le minimum de  $f_2$  sur  $\mathbb{R}$  est 9 et qu'il est atteint pour  $x = 3$ .

3.  $f_3$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_3(x) = -2(-x - 3)^2 + 9x - 5$$



### Corrigé

On n'a pas ici la *vertex form*, on va donc, en désespoir de cause développer l'expression puis tenter d'obtenir la forme canonique (*vertex form*).

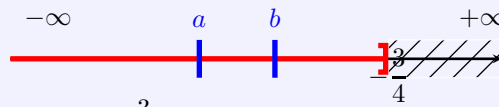
- Obtention de la forme canonique (*vertex form*).

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= -2(-x - 3)^2 + 9x - 5 \\
 &= -2(x + 3)^2 + 9x - 5 \\
 &= -2(x^2 + 6x + 9) + 9x - 5 \\
 &= -2x^2 - 12x - 18 + 9x - 5 \\
 &= -2x^2 - 3x - 23 \\
 &= -2 \left[ x^2 + \frac{3}{2}x \right] - 23 \\
 &= -2 \left[ \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right] - 23 \\
 &= -2 \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{9}{8} - 23
 \end{aligned}$$

$$f_3(x) = -2 \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{175}{8}$$

• Étudions les variations de  $f_1$  sur l'intervalle  $]-\infty ; -\frac{3}{4}]$ .

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]-\infty ; -\frac{3}{4}]$ .



$$a \leq b \leq -\frac{3}{4}$$

$a + \frac{3}{4} \leq b + \frac{3}{4} \leq 0$  : On a ajouté  $\frac{3}{4}$  à chaque membre ;

$$\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \left(b + \frac{3}{4}\right)^2$$

On a composé par la fonction carrée décroissante sur  $]-\infty ; 0[$ , ordre changé ;

$$-2 \left(a + \frac{3}{4}\right)^2 \leq -2 \left(b + \frac{3}{4}\right)^2 : \text{On a multiplié par } -2 < 0, \text{ l'ordre change ;}$$

$$\underbrace{-2 \left(a + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{175}{8}}_{f(a)} \leq \underbrace{-2 \left(b + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{175}{8}}_{f(b)} : \text{On a ajouté } -\frac{175}{8} \text{ à chaque membre ;}$$

$$f(a) \leq f(b)$$

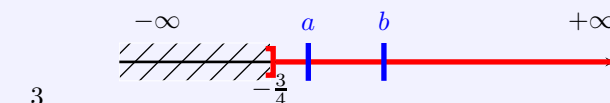
On vient de prouver que :

$$a \leq b \leq -\frac{3}{4} \implies f(a) \leq f(b)$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur l'intervalle  $]-\infty ; -\frac{3}{4}]$ .

- Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ .

Soit deux réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ .



$$-\frac{3}{4} \leq a \leq b$$

$$0 \leq a + \frac{3}{4} \leq b + \frac{3}{4}$$

$$\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 \leq \left(b + \frac{3}{4}\right)^2$$

On a composé par la fonction carrée décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ordre inchangé ;

$$-2 \left(a + \frac{3}{4}\right)^2 \geq -2 \left(b + \frac{3}{4}\right)^2 : \text{ On a multiplié par } -2 < 0, \text{ l'ordre change ;}$$

$$\underbrace{\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{175}{8}}_{f(a)} \geq \underbrace{\left(b + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{175}{8}}_{f(b)} : \text{ On a ajouté } (-2) \text{ à chaque membre ;}$$

$$f(a) \geq f(b)$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{-\frac{3}{4} \leq a \leq b \implies f(a) \geq f(b)}$$

La fonction  $f$  est donc décroissante sur l'intervalle  $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ .

- On conclut donc les variations de  $f_1$  en calculant l'image de  $-\frac{3}{4}$  soit  $f_3\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{175}{8}$  puisque :

$$f_3(x) = -2 \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{175}{8}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Variations de $f_1$	↘	$-\frac{175}{8}$	↘

- On sait donc aussi que le maximum de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$  est  $-\frac{175}{8}$  et qu'il est atteint pour  $x = -\frac{3}{4}$ .