Math93.com

TD n°3 - Seconde
Fonctions de références - Fonction inverse

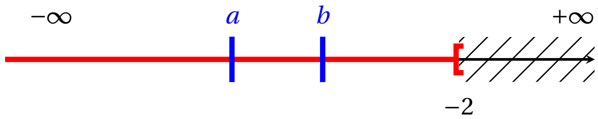
Exemple 1

On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{-3}{x+2} + 2$.

1. **Ensemble de définition.**
   Valeur interdite : L'expression $h(x)$ est définie si $x+2 \neq 0$ donc pour $x \neq -2$ donc $\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.

2. **Variations**

   - **Étudier les variations de h sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$.**
     Soit deux réels a et b de l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$.



$$a \leq b < -2$$

$a+2 \leq b+2 < 0$: On ajoute 2 à chaque membre ;

$\dfrac{1}{a+2} \geq \dfrac{1}{b+2}$: On compose par la fonction inverse décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$, l'ordre change ;

$\dfrac{-3}{a+2} \leq \dfrac{-3}{b+2}$: On multiplie par $-3 < 0$, l'ordre change ;

$\underbrace{\dfrac{-3}{a+2}+2}_{h(a)} \leq \underbrace{\dfrac{-3}{b+2}+2}_{h(b)}$: On ajoute 2 à chaque membre ;

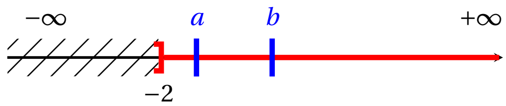
$$h(a) \leq h(b)$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{a \leq b < -2 \Longrightarrow h(a) \leq h(b)}$$

La fonction h est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$.

   - **Étudier les variations de h sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.**
     Soit deux réels a et b de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.



$$-2 < a \leq b$$

$0 < a+2 \leq b+2$: On ajoute 2 à chaque membre ;

$\dfrac{1}{a+2} \geq \dfrac{1}{b+2}$: On compose par la fonction inverse décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, l'ordre change ;

$\dfrac{-3}{a+2} \leq \dfrac{-3}{b+2}$: On multiplie par $-3 < 0$, l'ordre change ;

$\dfrac{-3}{a+2}+2 \leq \dfrac{-3}{b+2}+2$: On ajoute 2 à chaque membre ;

$$h(a) \leq h(b)$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{-2 < a \leq b \Longrightarrow h(a) \leq h(b)}$$

La fonction h est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$.

3. **Dresser alors le tableau de variations de la fonction h.**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de h	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Exercice 1. Suivez le modèle : Fonction inverse

1. Soit une fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{5}{x-2} + 2$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

1. b. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$ puis sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

1. c. Dresser alors le tableau de variations de la fonction g.

2. Soit une fonction h définie par :

$$h(x) = -2 - \frac{1}{5-x}$$

2. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

2. b. Étudier les variations de h sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ puis sur l'intervalle $]5\,;\,+\infty[$.

2. c. Dresser alors le tableau de variations de la fonction h.

3. Soit une fonction j définie par :

$$j(x) = \frac{x+4}{x+5}$$

3. a. Déterminer $\mathscr{D}_j$, l'ensemble de définition de la fonction j.

3. b. Montrer que pour tout réel x de $\mathscr{D}_j$ on a :

$$j(x) = 1 - \frac{1}{x+5}$$

3. c. Étudier les variations de j sur son ensemble de définition.

3. d. Dresser alors le tableau de variations de la fonction j.

3. e. Avec la calculatrice, déterminer les solutions (si elles existent) de l'équation

$$(E) \quad : \quad \frac{x+4}{x+5} = 2$$

puis retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 2. Un peu d'initiative

Étudier les fonctions suivantes :

1. f_1 définie par :

$$f_1(x) = \frac{x-2}{x-3} - 2$$

2. f_2 définie par :

$$f_2(x) = 1 - 2\frac{x+1}{x-1}$$

3. f_3 définie par :

$$f_3(x) = -\frac{5}{(x+5)^2}$$

4. f_4 définie par :

$$f_4(x) = 2 - \frac{2x+3}{1-x}$$