Math93.com

TD 1 - Seconde
Géométrie dans un repère

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponse.

Table des matières

Partie I. Applications du cours

Exercice 1. Un problème d'alignement

$ABCD$ est un carré de côté 8 cm.
Les points A, B et E sont alignés dans cet ordre et $BE = 13$ cm.
Les points A, D et F sont alignés dans cet ordre et $DF = 5$ cm.
Link geogebra

1. Réaliser une figure ci-dessous puis sur Geogebra et les utiliser pour émettre une conjecture sur l'alignement des points F, C et E.
2. Confirmer ou infirmer votre conjecture en étudiant l'alignement de ces trois points par toute méthode de votre choix.

Exercice 2. Cercle circonscrit

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. on considère les points

$$A(-3\ ;\ -1)\ \ ,\ \ B\,(-2\ ;\ 2)\ \ ,\ \ C\,(3\ ;\ -3)$$

1. Démontrer que ABC est rectangle en A.
2. Déterminer les coordonnées du point H, centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Calculer le rayon de ce cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

Réponses

$AB^2 = 10 \quad AC^2 = 40 \quad , BC^2 = 50$. *Le triangle* ABC *est rectangle en* A.
$H\,(0,5\ ;\ -0,5)$ *et le rayon du cercle est* $R = \dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ *unités.*

Exercice 3. Parallélogramme

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. on considère les points

$$A(-2\ ;\ 1)\ \ ,\ \ T\,(1\ ;\ 6)\ \ ,\ \ R\,(3\ ;\ 3)\ \ ,\ \ E\,(0\ ;\ -2)$$

1. Montrer que le quadrilatère ATRE est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que RPTE est un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point S sachant que T est le milieu du segment [ES].

Réponses

$P\,(4\ ;\ 11)$ *et* $S\,(2\ ;\ 14)$

Exercice 4. Un repère, dans un autre repère

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. on considère les points

$$A(1\ ;\ 0)\ \ ,\ \ B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)\ \ ,\ \ C\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1. Démontrer que $(A\ ,\ B\ ,\ C)$ est un repère orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées de A, B et C dans le repère $(A\ ,\ B\ ,\ C)$.

Réponses

$AB^2 = 1 = AC^2$, $BC^2 = 2$. *Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.*

Exercice 5. Choisissons un bon repère (c)

Soit ABCD un carré de centre O. On considère les points E et F, milieux respectifs de [DC] et [OB].

1. Faire une figure.
2. Lire les coordonnées de tous les points dans le repère orthonormé $(A\ ;\ B\ ;\ D)$.
3. Calculer les distances EF, EA et FA.
4. En déduire la nature du triangle EFA.

Exercice 6. Une histoire de milieux (c)

Soit ABC un triangle et M, N, P les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
On note Q le milieu du segment $[MN]$.

1. Faire une figure.
2. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, M, N, P et Q dans le repère $(A\ ,\ B\ ,\ C)$.
3. Démontrer que le point Q est le milieu du segment $[AP]$.
4. Refaire cet exercice sans introduire de repère.

Partie II. Bilan

Exercice 7. Bilan : Cercle circonscrit (c)

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. On considère les points

$$A(2\ ;\ 2)\ \ ,\ \ B\,(7\ ;\ 1)\ \ ,\ \ C\,(4\ ;\ 4)$$

1. Faire une figure dans le repère ci-dessous, qui sera complétée par la suite.

2. Démontrer que ABC est rectangle en C.

3. Déterminer les coordonnées du point H, centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

4. Calculer le rayon de ce cercle $\mathscr{C}$.

5. Montrer que le point $D(4;-1)$ est l'un des deux points d'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et du cercle $\mathscr{C}$.

6. Déterminer les coordonnées du point E, le symétrique du point D par rapport au point H.

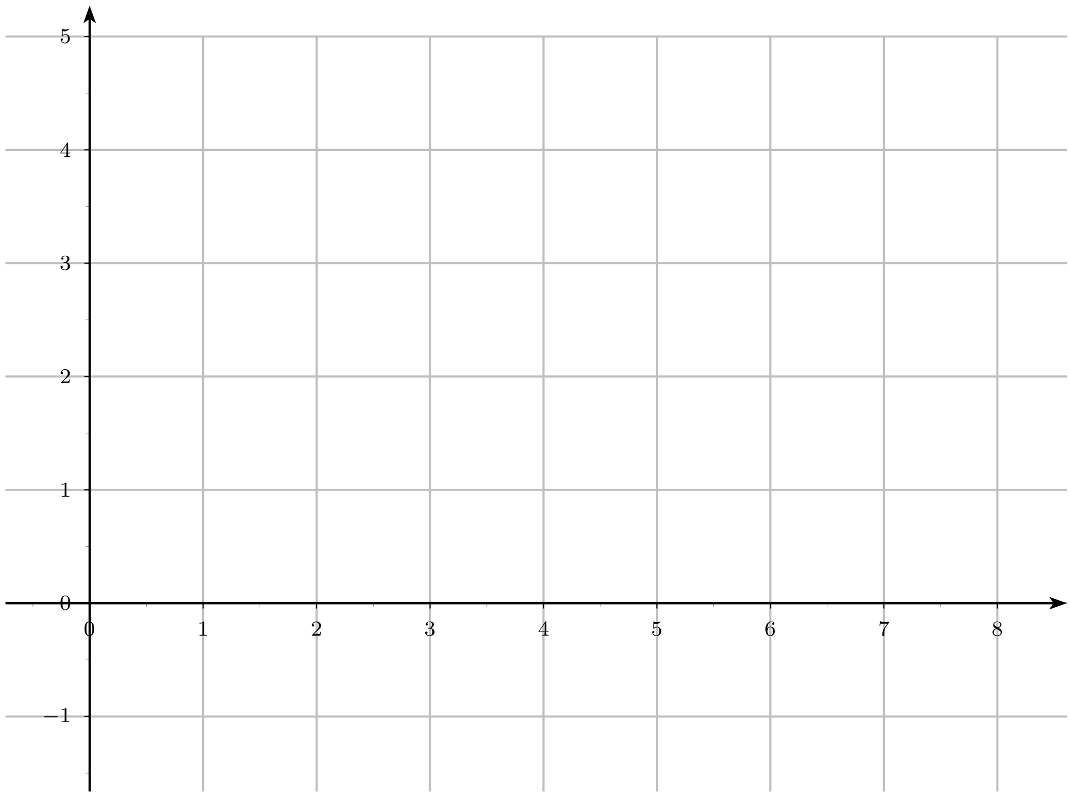
7. Que dire du quadrilatère $ADBE$?

8. Soit F le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)

8. a. Construire F.

8. b. Que représente (CF) pour le triangle ABC ?

8. c. En calculant l'aire du triangle ABC de deux façons, calculer la longueur CF.



Partie III. Python, c'est ma passion !

Exercice 8. Python : distance ... dans un R.O.N ... Obviously ! (c)

1. <u>Pour vos tests</u> : Soit dans un RON les points :

$$A(-3\,;\,4) \text{ et } B(7\,;\,-5)$$

Montrer que :

$$AB = \sqrt{181} \text{ u.l.} \approx 13,45 \text{ u.l.}$$

2. Écrire une fonction Python nommée ***distance***, qui prend en paramètre 2 tuples, représentant les coordonnées de 2 points dans un RON et qui renvoie la distance entre ces deux points.

On pourra proposer une valeur arrondie au centième d'unité.

```
from math import sqrt

def distance(tuple1,tuple2):
    '''In : tuple1 et tuple2 sont 2 tuples,
           coordonnées de 2 points A et B dans un RON
       Out : Distance AB dans un RON'''
    xA = ... # la première coordonnée du tuple 1
    yA = ... # la deuxième coordonnée du tuple 1
    xB = ... # la première coordonnée du tuple 2
    yB = ... # la deuxième coordonnée du tuple 2
    return  = ...


# Test
A=(-3,4)
# ici A[0]=-3 la première coordonnée du tuple A
# ici A[1]=4 la deuxième coordonnée du tuple A
B=(7,-5)


```

3. Tester votre fonction avec le résultat de la question 1°).

```
# On obtient dans la console
>>> distance(A,B)
13.45362404707371
```

Exercice 9. Python : Triangle isocèle ou rectangle (c)

1. Pour vos tests.

Soit dans un RON les points :

$$A(-32\ ;\ 32) \text{ et } B(80\ ;\ 16) \text{ et } C(32 \text{ et } 80)$$

Montrer que ABC est isocèle et rectangle avec

$$AB^2 = 12800 \text{ et } AC^2 = 6400 \text{ et } BC^2 = 6400$$

2. Triangle isocèle.

Écrire une fonction Python nommée ***isocele***, qui prend en paramètre 3 tuples, représentant les coordonnées de 3 points dans un RON et qui renvoie True si le triangle est isocèle, et False sinon.

```
def isocele(tuple1,tuple2,tuple3):
    '''In : tuple1, tuple2 et tuple3 sont 3 tuples
    Out: renvoie True si le triangle est isocèle, et False sinon.'''

    AB = distance(tuple1,tuple2)
    AC = ...
    BC = ...
    ...
```

Vous devrez utiliser la fonction ***distance*** précédente.

3. Triangle rectangle.

Écrire une fonction Python nommée ***rectangle***, qui prend en paramètre 3 tuples, représentant les coordonnées de 3 points dans un RON et qui renvoie True si le triangle est rectangle, et False sinon.

```
def rectangle(tuple1,tuple2,tuple3):
    '''In : tuple1, tuple2 et tuple3 sont 3 tuples
    Out: renvoie True si le triangle est rectangle, et False sinon.'''
        ...

```

Partie IV. Pour aller plus loin

Exercice 10. Triangle rectangle

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. on considère les points

$$A(1\ ;\ -2)\ \ ,\ \ B\,(0\ ;\ m)\ \ ,\ \ C\,(6\ ;\ -1)$$

Trouver le réel m pour que ABC soit un triangle rectangle en A.

Réponses

$m = 3$

Exercice 11. Médiatrice

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. on considère les points

$$A(-3\ ;\ 1)\ \ ,\ \ B\,(4\ ;\ 3)\ \ ,\ \ C\,(-1\ ;\ 6)$$

1. Le point C appartient-il à la médiatrice de [AB] ?
2. Déterminer le réel x pour que le point E$(x\ ;\ -3)$ appartienne à la médiatrice de [AB].

Réponses

Le point C n'appartient pas à la médiatrice de [AB]. On obtient $x = \dfrac{27}{14}$.

Partie V. Correction

Correction de l'exercice 5

Soit ABCD un carré de centre O. On considère les points E et F, milieux respectifs de [DC] et [OB].

1. Faire une figure.
2. Lire les coordonnées de tous les points dans le repère orthonormé $(A\ ;\ B\ ;\ D)$.
3. Calculer les distances EF, EA et FA.
4. En déduire la nature du triangle EFA.

Correction de l'exercice 6

Soit ABC un triangle et M, N, P les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. On note Q le milieu du segment $[MN]$.

1. **Faire une figure**.
2. **Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, M, N, P et Q dans le repère $(A\ ,\ B\ ,\ C)$.**
   Dans le repère $(A\ ,\ B\ ,\ C)$ on a

$$\boxed{A\,(0\ ;\ 0), B\,(1\ ;\ 0), C\,(0\ ;\ 1), M\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right), N\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right) \text{ et } Q\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)}.$$

3. **Démontrer que le point Q est le milieu du segment $[AP]$.**
   Le milieu I du segment $[AP]$ est de coordonnées $\begin{cases} x_I & = \dfrac{x_A + x_P}{2} & = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} = x_Q \\ \\ y_I & = \dfrac{y_A + y_P}{2} & = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} = y_Q \end{cases}$.
   On retrouve les coordonnées de Q donc le point $Q\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ est le milieu du segment $[AP]$.

Correction de l'exercice 7

Soit $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ un repère orthonormée du plan. On considère les points : $A(2\ ;\ 2)$, $B\,(7\ ;\ 1)$, $C\,(4\ ;\ 4)$.

1. **Faire une figure dans le repère ci-dessous, qui sera complétée par la suite.**
2. **Démontrer que ABC est rectangle en C.**
   On est dans un RON donc le calcul de distance est légitime avec les formules usuelles.

$$\begin{cases} A(2\ ;\ 2) \\ B\,(7\ ;\ 1) \\ C\,(4\ ;\ 4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} AB^2 = 5^2 + 1^2 = 26 \\ BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \\ AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \end{cases}$$

   Si ABC rectangle c'est en C car [AB] est le plus grand côté.
   D'une part, $AB^2 = 26$ et d'autre part $AC^2 + CB^2 = 26$. On a donc l'égalité $AB^2 = AC^2 + CB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C.

3. Déterminer les coordonnées du point H, centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

Puisque le triangle ABC est rectangle en C, de ce fait le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse [AB] soit :

$$\begin{cases} A(2\,;\,2) \\ B\,(7\,;\,1) \end{cases} \Longrightarrow H\left(\frac{7+2}{2}\,;\,\frac{2+1}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{H\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)}$$

4. Calculer le rayon de ce cercle $\mathscr{C}$.

Le rayon du cercle est donc :

$$\boxed{R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}\ \text{u.l.}}$$

5. Montrer que $D(4;-1)$ est l'un des deux points d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et du cercle $\mathscr{C}$.

$$\begin{cases} A(2\ ;\ 2) \\ B\,(7\ ;\ 1) \\ H\left(\dfrac{9}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right) \\ D(4\ ;\ -2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} AD^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \\ DB^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \\ DH^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{26}{4} \end{cases}$$

- D'une part : $AD = DB = \sqrt{13}$ u.l. donc le point D appartient à la médiatrice de [AB] ;
- D'autre part : $DH = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$ u.l. $= R$ donc le point D appartient au cercle $\mathscr{C}$;
- Conclusion : $D(4;-1)$ est l'un des deux points d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et du cercle $\mathscr{C}$.

6. Déterminer les coordonnées du point E, le symétrique du point D par rapport au point H.

$$H\left(\frac{9}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad D(4\ ;\ -1)$$

Le point E est le symétrique du point D par rapport au point H donc H est le milieu du segment [ED].

$$H = mil[ED] \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{2} = \dfrac{x_E + 4}{2} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{y_E - 2}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_E + 4 = 9 \\ Y_E - 1 = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{E\,(5\ ;\ 4)}$$

7. Que dire du quadrilatère $ADBE$?

- Par construction, le point H est le milieu des segments [AB] et [ED] donc le quadrilatère ADBE est un parallélogramme.
- Les segments [AB] et [ED] sont des rayons du cercle $\mathscr{C}$ donc ils sont de même mesure. Le parallélogramme ADBE a donc ses diagonales de même mesure, c'est un rectangle.
- Puisque le point D appartient à la médiatrice de [AB], les côtés consécutifs AD et DB sont de même mesure donc c'est aussi un carré.
- Conclusion : Le quadrilatère $ADBE$ est un carré.

8. Soit F le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .

8. a. Construire F.

8. b. Que représente (CF) pour le triangle ABC ?

(CF) est la hauteur (*altitude in english*) issue de C dans le triangle ABC et F est le pied de cette hauteur (*the foot of the altitude in english*). En effet, puisque F le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), les droites (CF) et (AB) sont perpendiculaires en F.

8. c. En calculant l'aire du triangle ABC de deux façons, calculer la longueur CF.

- D'une part puisque ABC est rectangle en C on a :

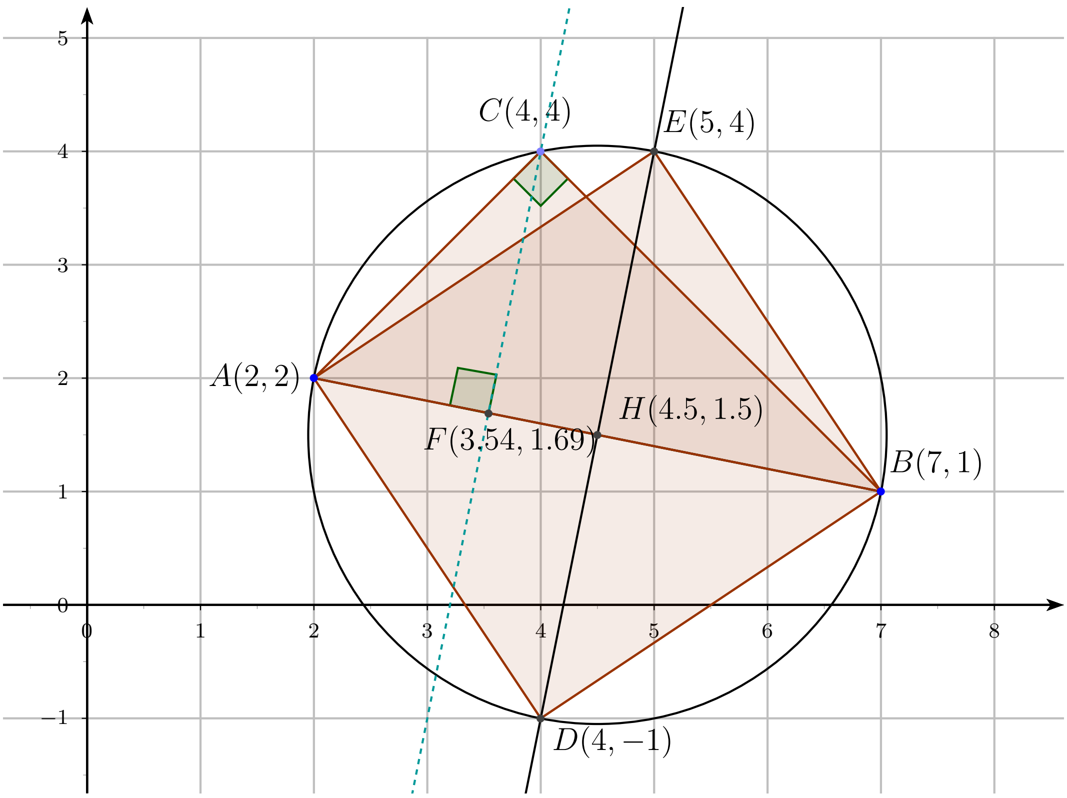
$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{CA \times CB}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \text{ u.a.}$$

- D'autre part en considérant (CH), la hauteur issue de C dans le triangle ABC donc relative au côté [AB] on a :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{CF \times AB}{2} = \frac{CF \times \sqrt{26}}{2} \text{ u.a.}$$

- On a donc :

$$\frac{CF \times \sqrt{26}}{2} = 6 \Longleftrightarrow CF = \frac{12}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{26} \Longleftrightarrow \boxed{CF = \frac{6\sqrt{26}}{13} \approx \underline{2{,}35 \text{ u.l.}}}$$



Correction des exercices sur python : ex. 8, ex. ??

La correction est disponible sur cette page : Python et Distances