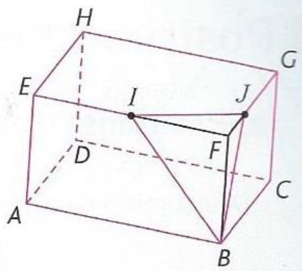
Correction du TD : Géométrie dans l'espace

Savoir faire Étudier un solide de l'espace

Énoncé

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de dimensions $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm, $AE = 4$ cm, représenté en perspective cavalière.

On considère le point I, milieu du segment $[EF]$, et le point J sur le segment $[FG]$, tel que $FJ = 2$ cm.



1. Reproduire la figure et placer précisément le point J.

2. a. Réaliser un patron du solide *ABCDEIJGH*.

b. Représenter à main levée et en perspective cavalière la pyramide *FIJB*, puis déterminer son volume.

c. En déduire le volume du solide *ABCDEIJGH*.

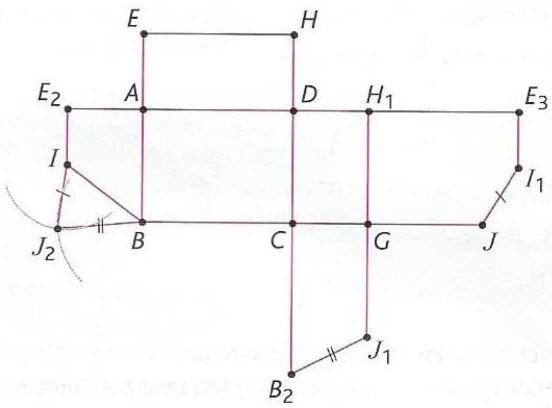
Solution rédigée

1. L'arête $[FG]$ représentée n'a pas pour longueur 8 cm sur la figure. Pour placer I précisément, on calcule le rapport de longueurs :

$$\frac{FJ}{FG} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

On place donc le point J au quart du segment $[FG]$ en partant de F (point 1).

2. a. (point 2)

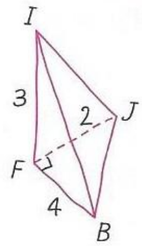


b. On choisit par exemple *BFJ* comme base de la pyramide.
La hauteur associée à cette base est *IF* (point 3).
FBJ est rectangle en *F*, son aire $\mathcal{B}$ est donc égale à :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times FB \times FJ = 4 \text{ cm}^2.$$

Donc, le volume de la pyramide est :

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4 \text{ cm}^3.$$



c. Le volume du solide cherché est obtenu en retranchant le volume de la pyramide *IFBJ* au volume du pavé de départ (point 4).
Le volume est donc :

$$V = 6 \times 8 \times 4 - 4 = 188 \text{ cm}^3.$$

Points méthode

1 La perspective cavalière ne conserve pas les longueurs, mais conserve les milieux et les rapports de longueurs.

2 On utilise du papier millimétré ou quadrillé pour reporter facilement les longueurs.
On utilise le compas pour reporter les longueurs BJ et BI et obtenir ainsi le point J_2.

3 La formule du volume d'une pyramide est :

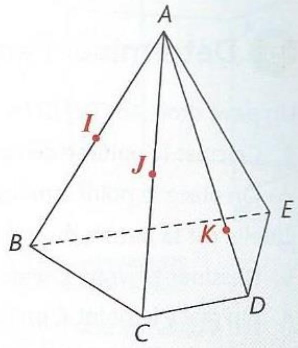
$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h.$$

On oriente la pyramide de façon à visualiser et calculer facilement l'aire de la base $\mathcal{B}$ et la hauteur h associée à cette base.
Ici, la base est le triangle *BFJ*, rectangle en *F*, et la hauteur associée est *FI*.

4 On exprime le volume comme différence de deux volumes connus.

Savoir faire Déterminer des positions relatives de droites et plans

Énoncé



$ABCDE$ est une pyramide, dont la base $BCDE$ est un quadrilatère tel que les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$, K est un point du segment $[AD]$ tel que $AK = \frac{3}{4}AD$.

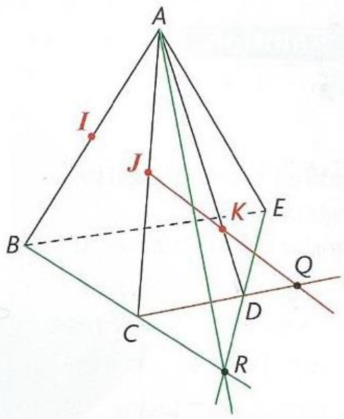
1. a. **Déterminer la position relative des droites (IJ) et (BC).**

b. **Déterminer la position relative des droites (JK) et (CD).**

2. a. **Déterminer l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD).**

b. **Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (ADE).**

Solution rédigée



1. a. On se place dans le plan (ABC).
En utilisant le théorème des milieux dans le triangle ABC, on peut affirmer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (point 1).

b. On se place dans le plan (ACD).
Les droites (JK) et (CD) sont sécantes.
Elles se coupent au point Q (point 2).

2. a. La droite (JK) coupe la droite (CD) en Q et (JK) n'est pas parallèle au plan (BCD) ; sinon elle serait entièrement contenue dans (BCD), et J serait un point du plan (BCD).
Donc l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD) est le point Q (point 3).

b. Le point A est commun aux plans (ABC) et (ADE). Ces deux plans ne sont donc pas parallèles, sinon ils seraient confondus.
De plus, les droites (BC) et (DE) situées dans le même plan (BCD) sont sécantes : on appelle R leur point d'intersection.
Le point R est dans le plan (BCD) et aussi dans le plan (ADE) (puisqu'il appartient à la droite (DE)).
L'intersection des plans (ABC) et (ADE) est la droite (AR) (point 4).

Points méthode

1 On se place dans un plan où l'on peut utiliser les théorèmes de géométrie plane.

2 On prolonge les droites coplanaires pour déterminer leur point d'intersection.

3 L'intersection d'une droite avec un plan est réduite à un point, lorsque la droite est non parallèle à ce plan. Il suffit donc de trouver ce point.

4 L'intersection de deux plans sécants est une droite. Il suffit donc de trouver deux points communs à ces deux plans pour obtenir la droite entière.