Math93.com

TD n°1 - Seconde
Inéquations

Exemple 1

Exemple : Étudions le signe de l'expression : $f(x) = \dfrac{2(2x+1)(1-3x)}{(x+5)(-4x)}$

1. **Valeurs interdites** : Les valeurs interdites sont donc -5 et 0 car :
   - $x+5 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -5$;
   - $-4x \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$.

2. **Étude du signe de chaque facteur** : On applique le résultat suivant :

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$ (avec $a \neq 0$)		Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

- **Étude du signe de $2x+1$** :
$$\begin{cases} 2x+1=0 \Longleftrightarrow x=-\dfrac{1}{2} \\ 2x+1<0 \Longleftrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
- **Étude du signe de $1-3x$** :
$$\begin{cases} 1-3x=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ 1-3x<0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{1}{3} \end{cases}$$
- **Étude du signe de $x+5$** :
$$\begin{cases} x+5=0 \Longleftrightarrow x=-5 \\ x+5<0 \Longleftrightarrow x>-5 \end{cases}$$
- **Étude du signe de $-4x$** :
$$\begin{cases} -4x=0 \Longleftrightarrow x=0 \\ -4x<0 \Longleftrightarrow x<0 \end{cases}$$

3. **Tableau de signes**

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $2x+1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
signe de $1-3x$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
signe de $-4x$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\dfrac{2(2x+1)(1-3x)}{(x+5)(-4x)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$$\boxed{f(x)>0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,-5\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right[\cup \left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[}$$

$$\boxed{f(x)=0 \Longleftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right\}} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x)<0 \Longleftrightarrow x \in \left]-5\,;\,-0{,}5\right[\cup \left]0\,;\,\frac{1}{3}\right[}$$

Méthode 1 (Résolution d'un inéquation)

Méthode : Pour résoudre une inéquation :

1. on détermine les valeurs interdites dans le cas d'un quotient;
2. on exprime tout sous la forme d'un produit ou d'un quotient (mise au même dénominateur, factorisation ...);
   On doit alors avoir obtenu une expression du type
   $$A(x) \times B(x) \times \frac{C(x)}{D(x)} \leq 0 \text{ ou } \geq 0 \text{ ou } < 0 \text{ ou } > 0$$
3. on tente d'exhiber des facteurs strictement positifs, par exemple (x^2+1);
   Attention : si un facteur est positif ou nul comme x^2, il devra apparaitre dans le tableau de signe.
4. on étudie le signe de chacun des autres facteurs;
5. on résume l'étude dans un tableau de signe;
6. et on conclut en donnant l'ensemble des solutions (bien vérifier si on cherche des solutions réelles ou entières).

Exercice 1. Avec une interprétation graphique

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) \ : \ x^2 \leq x$
2. Construire les courbes représentatives des fonctions $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = f(x) = x^2 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = g(x) = x \end{cases}$
   et retrouver graphiquement le résultat de la question 1°).
3. Déterminer l'ensemble des nombres réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
4. **Vrai ou Faux?** : Il n'y a pas d'entier naturel strictement supérieur à leur carré.

Réponses
$S_1 = [0\,;\,1]$ *et* $S_2 =]0\,;\,1[$

Exercice 2. Suivez le modèle

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_1) \ : \ \dfrac{4x-3}{4-5x} \leq 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_2) \ : \ (x-1)(1-2x) \leq 0$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_3) \ : \ x - \dfrac{4x+1}{3} < 2$
4. Résoudre sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ l'inéquation $(I_4) \ : \ x^2 < -4x$.
   On pourra faire l'étude de signe de l'expression sur $\mathbb{R}$ avant de réduire les solutions à l'ensemble des relatifs.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_51) \ : \ \dfrac{x+1}{x-1} \leq 0$

Réponses
$S_{I_1} =]-\infty\,;\,0,75] \cup]0,8\,;\,+\infty[$; $S_{I_2} =]-\infty\,;\,0,5] \cup [1\,;\,+\infty[$; $S_{I_3} =]-7\,;\,+\infty[$; $S_{I_4} = \{-3\,;\,-2\,;\,-1\}$

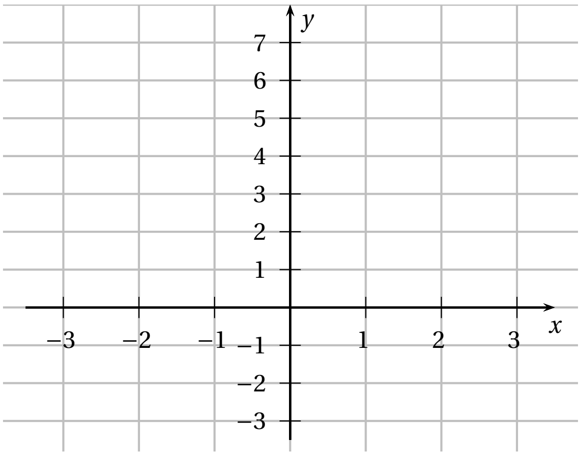
Exercice 3. Une histoire de carré

1. Déterminer l'ensemble des nombres réels qui ont un carré strictement supérieur à leur double.
2. En déduire l'ensemble des nombres entiers naturels qui ont un carré strictement supérieur à leur double.

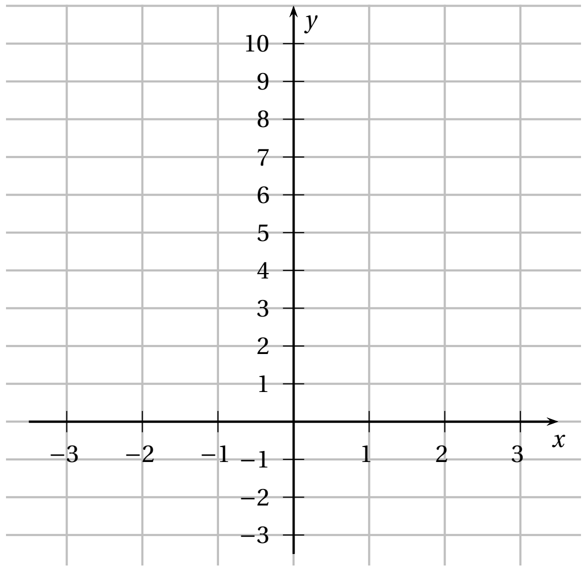
Réponses
$S_1 =]-\infty\,;\,0[\cup]2\,;\,+\infty[$ *et* $S_2 = \{3\,;\,4\,;\,5\,;\,...\}$

Exercice 4. Représentations graphiques

1. Sur le graphique suivant, construire les courbes représentatives de la fonction carrée et de $g : x \longmapsto g(x) = 2x$ puis retrouver le résultat de l'exercice précédent.



2. Sur le graphique suivant, construire les courbes représentatives de la fonction carrée et de $h : x \longmapsto h(x) = 3x$ puis résoudre graphiquement l'inégalité $(I) \quad : \quad x^2 < 3x$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.



Exercice 5. (c) Représentations graphiques

1. **(c)** Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction : $f : x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$.

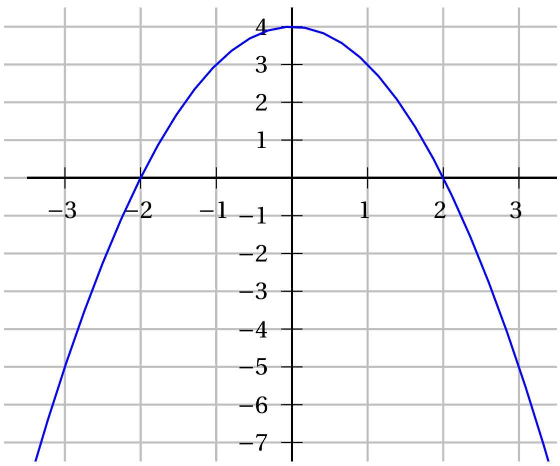
1. a. Résoudre graphiquement l'inéquation : $(I_5) \quad : \quad f(x) \geq 0$.

1. b. Construire sans justification $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction affine : $g : x \longmapsto g(x) = x-2$.

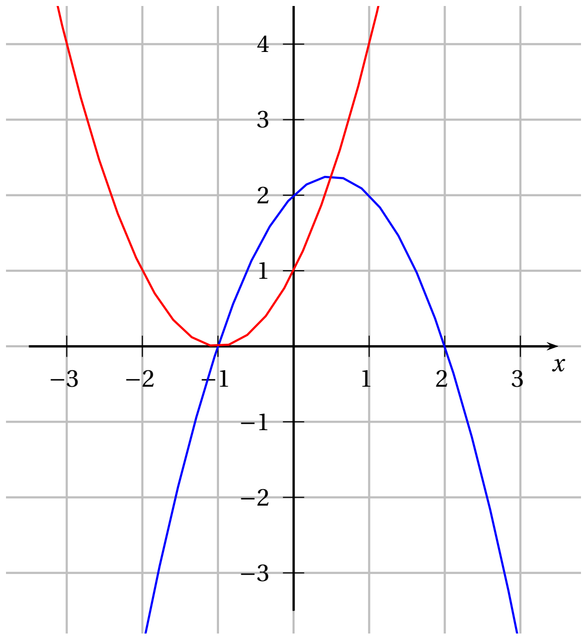
1. c. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(I_6) \quad : \quad f(x) \geq g(x)$$

1. d. Résoudre par le calcul l'inéquation : $(I_6) \quad : \quad f(x) \geq g(x)$.



2. Sur le graphique suivant, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = (x+1)(-x+2)$ et celle de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (x+1)^2$. Identifiez les courbes associées aux fonctions puis résoudre graphiquement l'inégalité $(I_2) \quad : \quad f(x) < g(x)$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.



3. Construire sur votre copie le graphe de la fonction inverse ainsi que celui de la fonction affine $g : x \longmapsto g(x) = 3x$.
Résoudre graphiquement l'inégalité $(I_3) \quad : \quad \dfrac{1}{x} < 3x$.
Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.

Exercice 6. Suivez le modèle

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $A(x) = (6x-1)(4x+3)(x+2)^2$;
2. $B(x) = -4(-3x+1)(-x-7)$;
3. $C(x) = \dfrac{2x}{5-x}$;
4. $D(x) = -4 \times \dfrac{3-5x}{2-x}$;
5. $E(x) = -5x^2(x-4)$;
6. $F(x) = \dfrac{-2x^2(-3x+5)}{x+2}$.
7. $G(x) = x^2+2x+1$

Réponses

- $A(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-0{,}75] \cup \left[\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$; $A(x) < 0 \iff x \in \left]-0{,}75\,;\,\frac{1}{6}\right[$; $A(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{-3}{4}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-2\right\}$
- $B(x) \geq 0 \iff x \in \left[-7\,;\,\frac{1}{3}\right]$; $B(x) < 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-7[\cup \left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$
- $C(x) \geq 0 \iff x \in [0\,;\,5[$; $C(x) < 0 \iff x \in]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$
- $D(x) \geq 0 \iff x \in \left[\frac{3}{5}\,;\,2\right[$; $D(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$
- $E(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty\,;\,4]$; $E(x) < 0 \iff x \in]4\,;\,+\infty[$
- $F(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-2[\cup \left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$; $F(x) < 0 \iff x \in]4\,;\,+\infty[$ / $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) \geq 0$; $G(x) = 0 \iff x = -1$.

Exercice 7. (c) Factoriser puis résoudre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. (I_8) : $(x+3)^2 > 9x^2$
2. (I_9) : $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{4}{4-x^2}$
3. (I_{10}) : $\dfrac{1}{x^2} < -1$

Exercice 8. Quelques fourberies

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $(x-1)^2 \leq 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2) : $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2\left(x^2-6x+9\right)} \leq 0$
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_3) : $4x(x-2) > (2x-1)^2$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_4) : $(6-x)(5-x) \leq 30$
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_5) : $4 \leq \dfrac{7-2x}{3x} \leq 11$
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_6) : $4x^3 < x$
7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_7) : $x^2 \leq -x^4$
8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_8) : $x^2 > x^4$
9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_9) : $(x+1)^2 > -5$

Réponses

$S_1 = \{1\}$; $S_2 = \{2\}$; $S_3 = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{4}\right[$; $S_4 = [0\,;\,11]$; $S_5 = \left[\frac{1}{5}\,;\,\frac{1}{2}\right]$; $S_6 = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$; $S_7 = \{0\}$; $S_9 =]-1\,;\,1[$; $S_9 = \mathbb{R}$

Exercice 9. Quelques algorithmes

1. **Algorithme n°1** : Écrire un algorithme qui affiche le signe de l'expression $f(x) = ax+b$. Traiter aussi le cas où $a = 0$.
2. **Algorithme n°2** : Écrire un algorithme qui donne les solutions de l'inégalité $ax+b < cx+d$.

Exercice 10. Algorithmes et série harmonique

On appelle série harmonique la somme (H_n), pour n entier supérieur à 1 et définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Calculer H_1, H_2, H_3, H_4.
2. A l'aide de votre calculatrice, trouver un entier n_2 tel que $H_{n_2} > 2$ puis de même un entier n_3 tel que $H_{n_3} > 3$.
3. Écrivez maintenant un algorithme qui permettant de calculer H_n en introduisant une fonction de paramètre n.
4. Modifier cet algorithme pour qu'il détermine (s'il existe), un entier n tel que $H_n > 10$.
5. Étrange non ? Quelle conjecture peut-on émettre ?

Corrections

Correction de l'exercice 5

Sur le graphique suivant, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction :

$$f : x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$$

1. **Résoudre graphiquement l'inéquation : (I_5) : $f(x) \geq 0$.**
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de l'axe des abscisses, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $\underline{[-2;2]}$.

2. **Construire sans justification $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction affine : $g : x \longmapsto g(x) = x-2$.**

3. **Résoudre graphiquement l'inéquation : (I_6) : $f(x) \geq g(x)$.**
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq f(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de ceux de $\mathscr{C}_f$, soit semble-t-il les réels x de l'intervalle $\underline{[-3;2]}$.

4. **Résoudre par le calcul l'inéquation (I_6) : $f(x) \geq g(x)$.**

$$\begin{aligned}
f(x) \geq g(x) &\iff (x-2)(-x-2) \geq x-2 \\
&\iff (x-2)(-x-2) - (x-2) \geq 0 \\
&\iff (x-2)\Big[(-x-2)-1\Big] \geq 0 \\
&\iff (x-2)(-x-3) \geq 0
\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(x-2)$:**

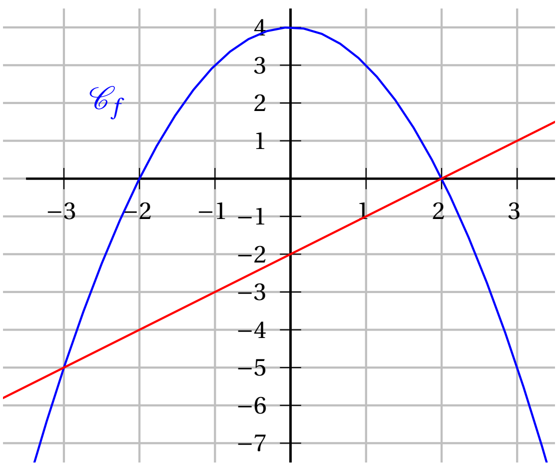
$$\begin{cases} x-2=0 \iff x=2 \\ x-2>0 \iff x>2 \end{cases}$$

- **Étude du signe de $1-3x$:**

$$\begin{cases} -x-3=0 \iff x=-3 \\ -x-3>0 \iff x<-3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-2)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x) \geq g(x) \iff x \in [-3;2]}$$



Correction de l'exercice 7

1. **(I_8) : $(x+3)^2 > 9x^2$.**

$$\begin{aligned}(I_8)\ :\quad (x+3)^2 > 9x^2 &\iff (x+3)^2 - 9x^2 > 0\\ &\iff (x+3)^2 - (3x)^2 > 0\\ &\iff (x+3-3x)(x+3+3x) > 0\\ &\iff (3-2x)(3+4x) > 0\end{aligned}$$

- **Étude du signe de $(3-2x)$:**

$$\begin{cases}(3-2x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}\\[2mm] (3-2x) > 0 \iff x < \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

- **Étude du signe de $(3+4x)$:**

$$\begin{cases}(3+4x) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{4}\\[2mm] (3+4x) > 0 \iff x > -\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $(3-2x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3+4x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(3-2x)(3+4x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{(x+3)^2 > 9x^2 \iff x \in \left]-\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right[}$$

2. **(I_9) : $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{4}{4-x^2}$.**

- Les valeurs interdites : Il faut que

$$\begin{cases}x+2 \neq 0 \iff x \neq -2\\ 4-x^2 \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -2\end{cases}$$

- Résolution.

$$\begin{aligned}(I_9)\ :\quad \frac{1}{x+2} \leq \frac{4}{4-x^2} &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} \leq 0\\ &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leq 0\\ &\iff \frac{(2-x)}{(2-x)(2+x)} - \frac{4}{(2-x)(2+x)} \leq 0\\ &\iff \frac{2-x-4}{(2-x)(2+x)} \leq 0\\ &\iff \frac{-2-x}{(2-x)(2+x)} \leq 0\end{aligned}$$

On peut remarquer que $-2-x = -(2+x)$. Le tableau de signe s'établit facilement :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $(-2-x)$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(2+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{-2-x}{(2-x)(2+x)}$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

$$\boxed{(I_9)\ :\quad \frac{1}{x+2} \leq \frac{4}{4-x^2} \iff x \in]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;2[}$$

3. (I_{10}) : $\dfrac{1}{x^2} < -1$.

- Valeur interdite : Il faut que $x^2 \neq 0$ soit x non nul.
- Résolution.
  Pour tout réel x, x^2 est positif est donc pour tout réel non nul, $\dfrac{1}{x^2} > 0$. De ce fait l'inéquation (I_{10}) : $\dfrac{1}{x^2} < -1$ n'admet pas de solution. $S_{10} = \varnothing$.