Math93.com

TD 1 - Seconde
Ensembles de nombres, intervalles et valeur absolue

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Partie I. Ensembles de nombres

Exercice 1. Ensembles de nombres (c)

Précisez le plus petit ensemble, au sens de l'inclusion, auquel appartiennent les nombres suivants :

1. $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$;
2. $B = \dfrac{2,8}{0,7}$;
3. $C = (-10)^2$;
4. $D = \dfrac{10-3}{4}$;
5. $E = \sqrt{49} - \sqrt{90-9}$;
6. $F = 5\pi - \pi\sqrt{16} - \dfrac{2\pi}{\sqrt{4}} - 1,0$;

Exercice 2. Ensembles de nombres 2 (c)

Précisez le plus petit ensemble, au sens de l'inclusion, auquel appartiennent les nombres suivants :

1. $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$;
2. $B = \sqrt{16} - \sqrt{25}$;
3. $C = \dfrac{121}{11}$;
4. $D = \dfrac{36}{4} - \sqrt{81}$;

Exercice 3. Ensembles de nombres 3 (c)

Dans chaque cas, trouver, lorsque cela est possible, un nombre x qui remplit les critères suivants.

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$;
2. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$;
4. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{R}$;

Exercice 4. Algorithme : vrai ou faux (c)

```
1 # Dans l'éditeur PYTHON
2 a=1
3 b=a+1
4 c=2*b
5 a=a+b+c
```

On considère l'algorithme ci-dessus écrit sous Python. On rappelle que le symbole = est un symbole d'affectation.
Compléter le tableau suivant puis dire si les affirmations sont vraies ou fausses

Ligne	a	b	c
L2	...	...	...
L3	...	...	...
L4	...	...	...
L5	...	...	...

1. **Proposition 1** : $a \in [0\ ;\ 7[$;
2. **Proposition 1** : $b \in [0\ ;\ 3[$;
3. **Proposition 1** : $c \in [0\ ;\ 4]$.

Exercice 5. Vrai ou Faux

Dire si ces affirmations sont vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
▷ *ex. 7 p 14 du livre scolaire*

1. Le quotient de deux nombres irrationnels est toujours un nombre irrationnel.

2. La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel.

3. Le quotient de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

4. Le carré d'un nombre irrationnel est toujours irrationnel.

5. Le produit d'un nombre rationnel par un nombre entier relatif est un nombre rationnel.

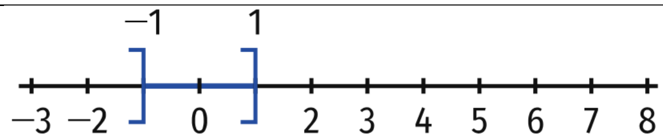
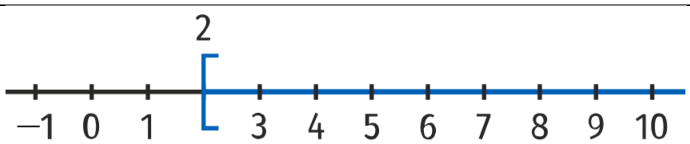
Exercice 6. On se teste avec Kwyk

▷ TD 1A : ensembles de nombres.

Partie II. Intervalles

Exercice 7. Intervalles

Compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$2 \leqslant x \leqslant 4$	....	
$x > 5$	....	
....	$]-\infty\ ;\ 4[$	
....	$[5\ ;\ 10[$	
....	....	
....	....	

Exercice 8. Intervalles (c)

On considère les intervalles suivants :

$$A =]-\infty\ ;\ 10] \quad ; \quad B =]-5\ ;\ 5] \quad ; \quad C =]3\ ;\ +\infty[$$

Déterminez et simplifiez les ensembles suivants :

1. $A \cap B$

2. $A \cap C$

3. $C \cap B$

4. $A \cup B$

5. $A \cup C$

6. $C \cup B$

Exercice 9. (c)

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1. 2 [ ] $]1\,;3[$
2. 0 [ ] $[-1\,;2[$
3. $\dfrac{1}{3}$ [ ] $[0\,;3]$
4. 2 [ ] $]-2\,;2[$
5. $\sqrt{2}$ [ ] $[-3\,;1]$
6. 0 [ ] $]0\,;+\infty[$
7. -100 [ ] $]-\infty\,;1[$
8. $\dfrac{1}{10}$ [ ] $[0{,}01\,;0{,}2[$

Exercice 10. Des équivalences

Recopier et compléter comme dans l'exemple puis écrire sous forme mathématique en utilisant le symbole $\Leftrightarrow$.

Exemple :

$x \in [1\,;2]$ si et seulement si $3x \in [3\,;6]$

$x \in [1\,;2] \Leftrightarrow 3x \in [3\,;6]$

1. $x \in [7\,;20]$ si et seulement si $7x \in \ldots$

2. $x \in]-1\,;3]$ si et seulement si $7 - x \in \ldots$

3. $x \in [-5\,;7]$ si et seulement si $2x + 3 \in \ldots$

4. $x \in \ldots$ si et seulement si $-2x \in [1\,;+\infty[$

5. $x \in \ldots$ si et seulement si $3 - x \in]-\infty\,;6]$

6. $x \in \ldots$ si et seulement si $7 + 2x \in [-1\,;1]$

Exercice 11. Un peu de Python (c)

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def DansIntervalle(a, b, x):
        '''In  : a, b, x des réels
           Out : un booleen, True ou False'''
        if x > a and x < b:
                  return(True)
          else:
                  return(False)
```

1. Quelle sera la valeur renvoyée par l'appelle 'DansIntervalle(5, 10, 3)' ? Expliquez ce que renvoie cette fonction.

2. Modifier ce programme pour qu'il teste si un nombre appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$ puis à l'intervalle $]a\ ;\ b]$ et enfin à l'intervalle $[a\ ;\ b[$.

Exercice 12. On se teste avec Kwyk

▷ TD 1B : intervalles.

Partie III. Valeur absolue

Exercice 13.

Donner la valeur absolue des nombres suivants (aucune justification n'est demandée) :

1. $|7-\sqrt{7}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $|\pi-4| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 14.

Pour chacune des inégalités suivantes, justifier si elle est vérifiée par le nombre 2 ou non.

1. $|x-3| \leqslant 2$

2. $|x-3| < 1$

3. $|x+3| \leqslant 2$

4. $|x-2| < 1$

Exercice 15. Équations

Résoudre les équations suivantes.

1. $|x| = 8$

2. $|x| = -5$

3. $|x-1| = 3$

4. $|2x+1| = 4$

Exercice 16.

Quel est le plus grand intervalle auquel appartient x dans chacun des cas suivants ?

1. $|x-2| \leqslant 3$

2. $x \leqslant 15$

3. $|x| \leqslant 1$

4. $0 \leqslant x \leqslant 2$

Exercice 17. On se teste avec Kwyk

▷ TD 1C : Valeur absolue.

Exercice 18. Un peu de Python (c)

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def ValAbs(x):
        '''In  :  x  réel
           Out : valeur absolue de x'''
        if .....:
                return ...
        else:
                return ...
```

Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie la valeur absolue de x.

Partie IV. Racines carrées

Exercice 19. Racines carrées

Faire le TD : Racines carrée et quantité conjuguée (lien)

Exercice 20. On se teste avec Kwyk

▷ TD 1D : Racines carrées.

Partie V. Puissances et notations scientifiques

Exercice 21. Puissances

Faire les 5 premiers exercices du TD : Puissances niveau 2 (lien)

Exercice 22. On se teste avec Kwyk

▷ TD 1E : Puissances.

Partie VI. Automatismes (Sans calculatrice)

Exercice 23. Automatismes - Sans Calculatrice (c)

On considère la relation $F = a + \dfrac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \dfrac{1}{2},\ b = 3,\ c = 4,\ d = -\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $-\dfrac{5}{2}$ **b.** $-\dfrac{3}{2}$ **c.** $\dfrac{5}{2}$ **d.** $\dfrac{3}{2}$

En déduire le plus petit ensemble auquel il appartient.

Exercice 24. Des fractions

On considère :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}.$$

a. $A = 0$ b. $A = -\frac{1}{6}$ c. $A = \frac{2}{3}$ d. $A = -1$

Exercice 25. Exprimer une variable en fonction d'autres (c)

On considère $x,\ y, u$ des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{u}$.
On peut affirmer que :

a. $u = \dfrac{xy}{x+y}$ **b.** $u = \dfrac{x+y}{xy}$ **c.** $u = xy$ **d.** $u = x + y$

Exercice 26. Exprimer une variable en fonction d'autres 2

A partir de la célèbre égalité de l'énergie cinétique (Leibniz, fin du 17e) :

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

1. Exprimer m en fonction de E et v.

2. Exprimer v en fonction de E et m.

Remarque

- Origine : mécanique classique (Newton).
- Signification : énergie cinétique due au mouvement d'un corps.

Exercice 27. Exprimer une variable en fonction d'autres 3

A partir de la célèbre formule de la relativité restreinte (Albert Einstein, 1905). :

$$E = mc^2$$

1. Exprimer m en fonction de E et v.

2. Exprimer c en fonction de E et m.

Remarque

- Origine : théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905).
- Signification : équivalence masse-énergie.
- Interprétation : une particule de masse m possède une énergie dite au repos :

$$E = mc^2$$

où $c \approx 3,0 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière.

Exercice 28. Exprimer une variable en fonction d'autres 4

L'aire A d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$A = 4\pi r^2$$

Exprimer r en fonction de A (et π évidemment).

Exercice 29. Exprimer une variable en fonction d'autres 5

Le volume V d'une boule de rayon r est donnée par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exprimer r en fonction de V (et π évidemment).

Exercice 30. Exprimer une variable en fonction d'autres 6

Lorsqu'un point mobile suit une trajectoire circulaire de rayon R, en mètre (m), son accélération centripète a (en m/s^2) s'exprime en fonction de la vitesse v (en m/s) de la manière suivante :

$$a = \frac{v^2}{R}$$

1. Exprimer v en fonction de a et R.
2. Exprimer R en fonction de a et v.

Exercice 31. Avec des puissances

1. Soit

$$A = \frac{10^7}{5^2}$$

On peut affirmer que :

a. $A = 2^5$ **b.** $A = 20\,000$ **c.** $A = \frac{1}{10^5}$ **d.** $A = 4 \times 10^5$

2. Soit pour x et y non nuls :

$$B = \frac{(xy^2)^5}{y^n}$$

Déterminer n pour que B ne s'exprime qu'en fonction de x.

Exercice 32. Ordre de grandeur

Un appareil a besoin d'une énergie de $7,5 \times 10^6$ Joules (J) pour se mettre en route. À combien de kiloWatts-heure (kWh) cela correspond-il ?

Données : $1kWh = 3,6 \times 10^6$ J.

a. $0,5$ kWh **b.** $2,08$ kWh **c.** $5,7$ kWh **d.** $28,5$ kWh

Exercice 33. Ordre de grandeur

Voici quatre nombres :

$$A = \left(\frac{1}{5}\right)^2, \quad B = \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad C = 0,05, \quad D = \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

Le plus grand de ces quatre nombres est :

a. A b. B c. C d. D

Exercice 34. Ordre de grandeur

On considère :

$$A = 10^{10} + 10^{-10}.$$

A est environ égal à :

a. 10^0 b. 0 c. 10^{10} d. 100^0

Exercice 35. Ordre croissant

Voici trois nombres :

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{19}{100}, \quad C = 0,21.$$

Le classement par ordre croissant de ces trois nombres est :

a. $A < B < C$ b. $A < C < B$ c. $B < A < C$ d. $C < B < A$

Partie VII. Now We Can Talk **

Exercice 36.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} = \frac{1-n}{1+n}.$$

Exercice 37. * (c)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|n^2 - n\right| = n^2 - n$$

Exercice 38. Diamètre d'un cercle (c)

On considère un cercle dont le périmètre est rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

Exercice 39. Vrai ou Faux ** (c)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un entier relatif.
2. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un nombre décimal.

Exercice 40. Dans le plan

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que :
$1 < x < 4$ et $5 \leqslant y \leqslant 6$.

1. Représenter graphiquement cet ensemble.
2. Reprendre la question précédente avec l'ensemble des points $\mathrm{N}(x\,;y)$ tels que :
$1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 4$ et $5 < 2 - 5y < 6$.

Exercice 41. Des inéquations ? (ex21 du LS)

Écrire chaque condition sous forme d'intersection et trouver l'ensemble des réels a appartenant à cette intersection.

1. $a < 3$ et $a > -6$;
2. $a \geqslant -5$ et $a \geqslant 7$
3. $2a + 1 < 3$ et $3a - 1 \geqslant 0$
4. $3(2 - a) < 3$ et $a - 1 \geqslant 2$

↫ **Fin du TD** ↬

Partie VIII. Corrections

Correction de l'exercice 1 page 1

1. $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$;
2. $B = \dfrac{2,8}{0,7} = \dfrac{28}{7} = \underline{4 \in \mathbb{N}}$;
3. $C = (-10)^2 = \underline{100 \in \mathbb{N}}$;
4. $D = \dfrac{10-3}{4} = \dfrac{7}{4} = \underline{1,75 \in \mathbb{D}}$;
5. $E = \sqrt{49} - \sqrt{90-9} = 7 - 8 = \underline{-1 \in \mathbb{Z}}$;
6. $F = 5\pi - \pi\sqrt{16} - \dfrac{2\pi}{\sqrt{4}} - 1,0 = 5\pi - 4\pi - \pi - 1,0 = \underline{-1 \in \mathbb{Z}}$;

Correction de l'exercice 2 page 1

1. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$

2. $\sqrt{16} - \sqrt{25}$

$\sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$. De plus $-1 \notin \mathbb{N}$.

3. $\dfrac{91}{7}$

$\dfrac{91}{7} = 13 \in \mathbb{N}$

4. $\dfrac{34}{2} - \sqrt{289}$

$\dfrac{34}{2} - \sqrt{289} = 0 \in \mathbb{N}$

Correction de l'exercice 3 page 1

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$

$x = \frac{1}{2}$ convient : en effet, $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ mais $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

2. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{2}$ convient : en effet, $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ mais $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

3. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$

π convient : en effet, $\pi \in \mathbb{R}$ mais, d'après le cours, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

4. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ donc si $x \in \mathbb{Q}$ alors, obligatoirement, $x \in \mathbb{R}$ donc on ne peut pas trouver de nombre x vérifiant le critère demandé.

Correction de l'exercice 4 page 1

```
1 # Dans l'éditeur PYTHON
2 a=1
3 b=a+1
4 c=2*b
5 a=a+b+c
```

On considère l'algorithme ci-dessus écrit sous Python. On rappelle que le symbole = est un symbole d'affectation.
Compléter le tableau suivant puis dire si les affirmations sont vraies ou fausses

Ligne	a	b	c
L2	1	X	X
L3	1	2	X
L4	1	2	4
L5	7	2	4

1. **Proposition 1** : FAUX car $a = 7 \notin [0\ ;\ 7[$;
2. **Proposition 1** : VRAI car $b = 2 \in [0\ ;\ 3[$;
3. **Proposition 1** : VRAI car $c = 4 \in [0\ ;\ 4]$.

Correction de l'exercice 8 page 2

$$A =]-\infty\ ;\ 10] \quad ; \quad B =]-5\ ;\ 5] \quad ; \quad C =]3\ ;\ +\infty[$$

Déterminez et simplifiez les ensembles suivants :

1. $A \cap B = B$
2. $A \cap C =]3\ ;\ 10]$
3. $C \cap B =]3\ ;\ 5]$
4. $A \cup B = A$
5. $A \cup C = \mathbb{R}$
6. $C \cup B =]-5\ ;\ +\infty[$

Correction de l'exercice 9

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1. 2 $\in$ $]1\,;3[$
2. 0 $\in$ $[-1\,;2[$
3. $\dfrac{1}{3}$ $\in$ $[0\,;3]$
4. 2 $\notin$ $]-2\,;2[$
5. $\sqrt{2}$ $\notin$ $[-3\,;1]$
6. 0 $\notin$ $]0\,;+\infty[$
7. -100 $\in$ $]-\infty\,;1[$
8. $\dfrac{1}{10}$ $\in$ $[0{,}01\,;0{,}2[$

Correction de l'exercice 11 page 4

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def DansIntervalle(a, b, x):
        '''In  : a, b, x des réels
           Out : un booleen, True ou False'''
        if x > a and x < b:
                  return(True)
          else:
                  return(False)
```

1. Quelle sera la valeur renvoyée par l'appelle 'DansIntervalle(5, 10, 3)' ? Expliquez ce que renvoie cette fonction.

Corrigé

Cette fonction python de paramètres (a, b, x) va renvoyer un BOOLEEN, TRUE si x est dans l'intervalle $]a\ ;\ b[$ et FALSE sinon.

Donc l'appelle 'DansIntervalle(5, 10, 3)' va renvoyer FALSE car $3 \notin]5\ ;\ 10[$.

2. Modifier ce programme pour qu'il teste si un nombre appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$ puis à l'intervalle $]a\ ;\ b]$ et enfin à l'intervalle $[a\ ;\ b[$.

Corrigé

- Pour qu'il teste si un nombre appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$, il faut modifier le test par :

$$\boxed{if\ \ x >= a\ \text{ and }\ x <= b}$$

- Pour qu'il teste si un nombre appartient à l'intervalle $]a\ ;\ b]$, il faut modifier le test par :

$$\boxed{if\ \ x > a\ \text{ and }\ x <= b}$$

- Pour qu'il teste si un nombre appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b[$, il faut modifier le test par :

$$\boxed{if\ \ x >= a\ \text{ and }\ x < b}$$

Correction de l'exercice 15 page 5

1. Équation $|x| = 8$:

$$|x| = 8 \iff \boxed{x = 8 \text{ ou } x = -8}$$

Soit

$$\boxed{S_1 = \{-8\ ;\ 8\}}$$

2. Équation $|x| = -5$:
Cette équation n'admet pas de solution car pour tout réel x on a $|x| \geqslant 0$ soit

$$\boxed{S_2 = \varnothing}$$

3. Équation $|x-1| = 3$:

$$\begin{aligned} |x-1| = 3 &\iff \big(x-1=3\big) \text{ ou } \big(x-1=-3\big) \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{S_3 = \{-2\ ;\ 4\}}$$

4. Équation $|2x+1| = 4$:

$$\begin{aligned} |2x+1| = 4 &\iff \big(2x+1=4\big) \text{ ou } \big(2x+1=-4\big) \\ &\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{S_4 = \left\{-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right\}}$$

Correction de l'exercice 16 page 6

Quel est le plus grand intervalle auquel appartient x dans chacun des cas suivants ?

1. $|x-2| \leqslant 3$:

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 &\iff -3 \leqslant x-2 \leqslant 3 \\ &\iff -1 \leqslant x \leqslant 5 \\ &\iff \boxed{x \in [-1\ ;\ 5]} \end{aligned}$$

2. $x \leqslant 15$:

$$x \leqslant 15 \iff \boxed{x \in]-\infty\ ;\ 15]}$$

3. $|x| \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} |x| \leqslant 1 &\iff -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\iff \boxed{x \in [-1\ ;\ 1]} \end{aligned}$$

4. $0 \leqslant x \leqslant 2$:

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \iff \boxed{x \in [0\ ;\ 2]}$$

Correction de l'exercice 18 page 6

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def ValAbs(x):
        '''In  :  x  réel
           Out : valeur absolue de x'''
        if .....:
                return ...
        else:
                return ...
```

Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie la valeur absolue de x.

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def ValAbs(x):
        '''In  :  x  réel
           Out : valeur absolue de x'''
        if x>=0:
                return x
        else:
                return -x
```

Correction de l'exercice 23 page 7

On considère la relation $F = a + \dfrac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \dfrac{1}{2},\ b = 3,\ c = 4,\ d = -\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $-\dfrac{5}{2}$ **b.** $-\dfrac{3}{2}$ **c.** $\dfrac{5}{2}$ **d.** $\dfrac{3}{2}$

Corrigé

On calcule :

$$cd = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

Puis :

$$F = \frac{1}{2} + \frac{3}{-1} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{-\frac{5}{2} \in \mathbb{Z}} \quad \text{(choix a)}$$

Correction de l'exercice 25 page 7

On considère $x,\ y, u$ des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{u}$.

On peut affirmer que :

a. $u = \dfrac{xy}{x+y}$ **b.** $u = \dfrac{x+y}{xy}$ **c.** $u = xy$ **d.** $u = x + y$

Corrigé

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{u} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{xy}{x+y}$$

$$\boxed{u = \frac{xy}{x+y}} \quad \text{(choix a)}$$

Correction de l'exercice 39 page 10

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un entier relatif.

Corrigé

Nous allons prouver que cette affirmation est fausse en raisonnant par l'absurde.
Soit p et q deux nombres premiers distincts, donc $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p > q$ (par exemple).
Supposons que le quotient de p et q soit un entier relatif soit :

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$$

Puisque p et q sont des entiers premiers, ils sont strictement positifs donc on peut supposer que :

$$\frac{p}{q} = k \in \mathbb{N}^*$$

De ce fait :

$$\frac{p}{q} = k \iff p = k \times q$$

Or on a supposé que p était premier, donc si il s'exprime comme produit de deux entiers $p = k \times q$ c'est que :

- <u>Soit $k = 1$</u> mais alors $p = q$ ce qui n'est pas possible car on a supposé que p et q distincts.
- <u>Soit $q = 1$</u> mais ce n'est pas possible car on a supposé que q était premier (et 1 n'est pas premier).

L'affirmation est donc fausse, on a donc prouvé que le quotient de deux nombres premiers distincts ne peut pas être un entier relatif.

2. Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un nombre décimal.

Corrigé

C'est affirmation est vraie, par exemple 2 et 3 sont deux nombres premiers distincts et

$$\frac{3}{2} = 1,5 \in \mathbb{D}$$

Correction de l'exercice 37 page10

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|n^2 - n\right| = n^2 - n$.

Preuve

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

  $$n \geqslant 1$$

  On peut multiplier chaque membre de l'inégalité par $n > 0$ soit :

  $$n^2 \geqslant n \iff n^2 - n \geqslant 0$$

  De ce fait :

  $$\left|n^2 - n\right| = n^2 - n$$

- Il reste à traiter le cas où $n = 0$ qui est trivial car si $n = 0$:

  $$\left|n^2 - n\right| = |0| = 0 \quad \text{et} \quad n^2 - n = 0$$

- <u>Conclusion</u> : On a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|n^2 - n\right| = n^2 - n$.

Correction de l'exercice 38 page 10

On considère un cercle dont le périmètre est rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

Corrigé

Soit un cercle de diamètre d dont le périmètre p est rationnel, soit $p \in \mathbb{Q}$.
On a alors :

$$p = \pi \times d \iff \pi = \frac{p}{d}$$

Supposons alors que d soit rationnel, soit $d \in \mathbb{Q}$.
D'après l'égalité précédente $\left(\pi = \dfrac{p}{d}\right)$, cela imposerait que π soit aussi rationnel puisque le quotient de deux nombres rationnels (avec le diviseur non nul) est aussi rationnel (cela se démontre facilement ... non ?).
Or d'après le cours, on sait que l'irrationalité du nombre π a été établie en 1761 par le mathématicien français (ou suisse !) Jean-Henri Lambert (1728-1777).