Math93.com

TD 2 - Seconde
Nombres et calcul : Racines carrées

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Exercice 1. Application directe du cours

En détaillant, donner une écriture sans radical $\sqrt{.}$ des nombres suivants :

1. $A = -\left(\sqrt{19}\right)^2$
2. $B = \left(-\sqrt{19}\right)^2$
3. $C = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$
4. $D = \dfrac{121}{144}$
5. $E = \sqrt{64+36}$

Exercice 2. (c) Forme $a\sqrt{b}$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad \boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

En suivant le modèle, écrire les nombre suivants, sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $b \in \mathbb{N}$, le plus petit possible.

Exemple

$$\sqrt{12} = \sqrt{\underbrace{\boxed{4}}_{\text{carré le plus grand possible}} \times 3} = \underbrace{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}_{\text{car} \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}} = \underline{2\sqrt{3}}$$

1. $\sqrt{20} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\sqrt{27} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $\sqrt{32} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $\sqrt{50} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $\sqrt{40} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $\sqrt{200} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $\sqrt{75} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $\sqrt{72} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9. $\sqrt{490} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
10. $\sqrt{242} = \sqrt{\boxed{\cdots} \times \cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 3. (c) Forme $a + b\sqrt{c}$

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c \in \mathbb{N}$ le plus petit possible :

$$E = \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{32} \quad ; \quad L = \sqrt{40} - 2\sqrt{90} + 3\sqrt{160} \quad ; \quad M = \sqrt{75} - 2\sqrt{50} + 6\sqrt{125}$$

Exercice 4. (c) Forme $a + b\sqrt{c}$

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c \in \mathbb{N}$ le plus petit possible :

$$J = \sqrt{15}\left(3 - \sqrt{15}\right) - \left(\sqrt{15} + 5\right) \quad ; \quad K = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right)^2 \quad ; \quad F = \left(3\sqrt{2} - 5\right)\left(3\sqrt{2} + 5\right)$$

Exercice 5. Utilisation de la quantité conjuguée (*conjugate*) (c)

Quantité conjuguée (*conjugate*)

La quantité conjuguée d'une expression de la forme $(A - B)$ est $(A + B)$ et réciproquement ; la quantité conjuguée de $(A + B)$ est $(A - B)$.
Par exemple la quantité conjuguée de $\left(2+\sqrt{3}\right)$ est $\left(2-\sqrt{3}\right)$.
L'intérêt est que lorsqu'on multiplie ces deux expressions, on obtient une nouvelle expression qui n'a plus de racine carrée du fait de l'application de la 3^e identité remarquable. Par exemple :

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$$

Supprimez les radicaux au dénominateur dans les expressions suivantes.

1. $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$
2. $B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
3. $C=\dfrac{1}{\sqrt{6}-5}$
4. $D=\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
5. $E=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$
6. $F=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

Exercice 6. Calculs de valeurs d'une fonction (c)

On considère la fonction B définie pour x réel par

$$B(x)=(3x-1)^2-(x+2)^2$$

1. Calculer l'image de $\sqrt{5}$ par B, c'est à dire $B\left(\sqrt{5}\right)$ en donnant le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c\in\mathbb{N}$ le plus petit possible.
2. Sans calculatrice, donner le signe de $B\left(\sqrt{5}\right)$.
3. Factoriser $B(x)$ puis reprendre le calcul précédent en utilisant la forme factorisée de $B(x)$.

Exercice 7. PPF : là, on peut discuter ! (c)

On pose :

$$a=\sqrt{\left(181+52\sqrt{3}\right)}\ \text{ et }\ b=\sqrt{\left(181-52\sqrt{3}\right)}$$

1.

1. a. En utilisant un encadrement de $\sqrt{3}$, montrer que $181-52\sqrt{3}>0$.

1. b. Justifier l'existence du nombre b.

2.

2. a. Calculer a^2 et b^2 puis ab (on demande des valeurs exactes simplifiées).

2. b. En déduire $(a+b)^2$ puis la valeur exacte de $(a+b)$.

3.

3. a. Développer $\left(13+2\sqrt{3}\right)^2$ et en déduire une écriture simplifiée de a.

3. b. Développer $\left(13-2\sqrt{3}\right)^2$ et en déduire une écriture simplifiée de b.

3. c. Retrouver grâce aux deux questions précédentes la valeur exacte de $(a+b)$ obtenue au 2/ b/.

↩ **Fin du TD** ↪

Corrections

Correction de l'exercice 2 page 1

1. $\sqrt{20} = \sqrt{\boxed{4} \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \underline{2\sqrt{5}}$
2. $\sqrt{27} = \sqrt{\boxed{9} \times 3} = \underline{3\sqrt{3}}$
3. $\sqrt{32} = \sqrt{\boxed{16} \times 2} = \underline{4\sqrt{2}}$
4. $\sqrt{50} = \sqrt{\boxed{25} \times 2} = \underline{5\sqrt{2}}$
5. $\sqrt{40} = \sqrt{\boxed{4} \times 10} = \underline{2\sqrt{10}}$
6. $\sqrt{200} = \sqrt{\boxed{100} \times 2} = \underline{10\sqrt{2}}$
7. $\sqrt{75} = \sqrt{\boxed{25} \times 3} = \underline{5\sqrt{3}}$
8. $\sqrt{72} = \sqrt{\boxed{36} \times 2} = \underline{6\sqrt{2}}$
9. $\sqrt{490} = \sqrt{\boxed{49} \times 10} = \underline{7\sqrt{10}}$
10. $\sqrt{242} = \sqrt{\boxed{121} \times 2} = \underline{11\sqrt{2}}$

Correction de l'exercice 3 page 1

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c \in \mathbb{N}$ le plus petit possible :

1. $E = \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{32}$

Corrigé

$$E = \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{32}$$
$$E = \sqrt{4 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{16 \times 2}$$
$$E = 2\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$
$$\boxed{E = 0}$$

2. $L = \sqrt{40} - 2\sqrt{90} + 3\sqrt{160}$

Corrigé

$$L = \sqrt{40} - 2\sqrt{90} + 3\sqrt{160}$$
$$L = \sqrt{4 \times 10} - 2\sqrt{9 \times 10} + 3\sqrt{16 \times 10}$$
$$L = 2\sqrt{10} - 6\sqrt{10} + 12\sqrt{10}$$
$$\boxed{L = 8\sqrt{10}}$$

3. $M = \sqrt{500} - 3\sqrt{45} - 2\sqrt{20}$

Corrigé

$$M = \sqrt{500} - 3\sqrt{45} - 2\sqrt{20}$$
$$M = \sqrt{100 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5}$$
$$M = 10\sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5}$$
$$M = 10\sqrt{5} - 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$$
$$\boxed{M = -3\sqrt{5}}$$

Correction de l'exercice 4 page 1

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c \in \mathbb{N}$ le plus petit possible :

1. $J = \sqrt{15}\left(3 - \sqrt{15}\right) - \left(\sqrt{15} + 5\right)$

Corrigé

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{15}\left(3 - \sqrt{15}\right) - \left(\sqrt{15} + 5\right) \\ J &= 3\sqrt{15} - 15 - \sqrt{15} - 5 \\ &\boxed{J = 2\sqrt{15} - 20} \end{aligned}$$

2. $K = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right)^2$

Corrigé

$$\begin{aligned} K &= \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right)^2 \\ K &= 3 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{15} + \left(2\sqrt{15}\right)^2 \\ &= 3 - 6 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + 4 \times 15 \\ &= 3 - 6 \times 3 \times \sqrt{5} + 60 \\ &\boxed{K = 63 - 18\sqrt{5}} \end{aligned}$$

3. $F = \left(3\sqrt{2} - 5\right)\left(3\sqrt{2} + 5\right)$

Corrigé

$$F = \left(3\sqrt{2} - 5\right)\left(3\sqrt{2} + 5\right) = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 25 = 18 - 25 = \underline{-7}$$

Correction de l'exercice 5 page 2

1. $A = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 \times (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \times (1 - \sqrt{2})} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \boxed{-1 + \sqrt{2}}$

2. $B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

3. $C = \dfrac{19}{\sqrt{6} - 5} = \dfrac{19 \times (\sqrt{6} + 5)}{(\sqrt{6} - 5) \times (\sqrt{6} + 5)} = \dfrac{19 \times (\sqrt{6} + 5)}{6 - 25} = \dfrac{19 \times (\sqrt{6} + 5)}{-19} = \boxed{-\sqrt{6} - 5}$

4. $D = \dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \dfrac{2 \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \dfrac{2 \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = \boxed{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$

5. $E = \dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{7}} = \dfrac{3 \times (\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(\sqrt{5} - \sqrt{7}) \times (\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \dfrac{3 \times (\sqrt{5} + \sqrt{7})}{5 - 7} = \boxed{\dfrac{-3}{2} \times (\sqrt{5} + \sqrt{7})}$

6. $F = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Correction de l'exercice 6 page 2

On considère l'expression B définie pour x réel par

$$B(x) = (3x-1)^2 - (x+2)^2$$

1. Calculer l'image de $\sqrt{5}$ par B, c'est à dire $B\left(\sqrt{5}\right)$ en donnant le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres a, b sont entiers relatifs et $c \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

Preuve

Pour $x = \sqrt{5}$ on obtient

$$B\left(\sqrt{5}\right) = \left(3\sqrt{5}-1\right)^2 - \left(\sqrt{5}+2\right)^2$$
$$B\left(\sqrt{5}\right) = 9 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 - 6\sqrt{5} + 1 - \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 + 4\sqrt{5} + 4\right)$$
$$B\left(\sqrt{5}\right) = 45 - 6\sqrt{5} + 1 - 5 - 4\sqrt{5} - 4$$

soit

$$\boxed{B\left(\sqrt{5}\right) = 37 - 10\sqrt{5}}$$

2. Sans calculatrice, donner le signe de $B\left(\sqrt{5}\right)$.

Preuve

Puisque $2^2 < 5 < 3^2$ on a :

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

On multipliant chaque membre de ces inégalités par 10 qui est strictement positif on a :

$$20 < 10\sqrt{5} < 30$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{B\left(\sqrt{5}\right) = 37 - 10\sqrt{5} > 0}$$

Remarque

Pour être plus rigoureux, on peut en utilisant le cours sur les inéquations écrire que :

$$\begin{aligned} 2 < \sqrt{5} < 3 &\iff 20 < 10\sqrt{5} < 30 \\ &\iff -20 > -10\sqrt{5} > -30 \\ &\iff -30 < -10\sqrt{5} < -20 \\ &\iff 37-30 < 37 - 10\sqrt{5} < 37-20 \\ &\iff \boxed{7 < B\left(\sqrt{5}\right) < 17} \end{aligned}$$

3. Factoriser $B(x)$ puis reprendre le calcul précédent en utilisant la forme factorisée de $B(x)$.

Preuve

- Factorisons $B(x)$ en utilisant la troisième identité remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$:

$$B(x) = ((3x-1)+(x+2))((3x-1)-(x+2))$$
$$B(x) = (4x+1)(3x-1-x-2)$$

soit

$$\boxed{B(x) = (4x+1)(2x-3)}$$

.

- Pour $x = \sqrt{5}$ on obtient

$$B\left(\sqrt{5}\right) = \left(4\sqrt{5}+1\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)$$

puis par développement

$$B\left(\sqrt{5}\right) = 8\left(\sqrt{5}\right)^2 - 12\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3$$
$$B\left(\sqrt{5}\right) = 40 - 10\sqrt{5} - 3$$

On obtient donc

$$\boxed{B\left(\sqrt{5}\right) = 37 - 10\sqrt{5}}$$

.

Correction de l'exercice 7 page 2

1.

1. a. On a $181 - 52\sqrt{3} \approx 90,9 > 0$.

1. b. Alors b existe bien puisque c'est la racine carrée d'un nombre positif : $181 - 52\sqrt{3}$.

2.

2. a. On a

- $a^2 = \left(\sqrt{181+52\sqrt{3}}\right)^2$ soit $\boxed{a^2 = 181 + 52\sqrt{3}}$.
- $b^2 = \left(\sqrt{181-52\sqrt{3}}\right)^2$ soit $\boxed{b^2 = 181 - 52\sqrt{3}}$.
- et pour le calcul de ab

$$ab = \sqrt{181+52\sqrt{3}} \times \sqrt{181-52\sqrt{3}}$$
$$ab = \sqrt{\left(181+52\sqrt{3}\right)\left(181-52\sqrt{3}\right)}$$

on développe en utilisant la troisième identité remarquable

$$ab = \sqrt{181^2 - 52^2 \times 3} = \sqrt{24\,649}$$

On obtient alors $\boxed{ab = 157}$

2. b. On a en développant et en utilisant la question **2a)**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 181 + 52\sqrt{3} + 2 \times 157 + 181 - 52\sqrt{3}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{(a+b)^2 = 676}$$

Attention au passage suivant. On sait depuis la classe de troisième que l'équation $x^2 = A$ admet deux solutions distinctes si $A > 0$ qui sont $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$. Une autre façon de voir cela est de bien comprendre que :

Théorème 1 (Valeur absolue)

Pour tout réel x on a

$$\sqrt{x^2} = |x| = \text{ Distance à zéro de } x$$

La **distance à zéro** se nommera **valeur absolue** au Lycée .

Ici, puisque $(a+b)^2 = 676$, on en déduit que $(a+b) = \sqrt{676}$ ou $(a+b) = -\sqrt{676}$.
Mais comme $a+b$ est strictement positif, la solution négative n'est pas valable et donc

$$\boxed{(a+b) = \sqrt{676} = 26}$$

3.

3. a. On a

$$\left(13+2\sqrt{3}\right)^2 = 169 + 2\times 13\times 2\sqrt{3} + 4\times 3 = 181 + 52\sqrt{3}$$

soit

$$\boxed{\left(13+2\sqrt{3}\right)^2 = a^2}$$

donc a est égale à $\sqrt{\left(13+2\sqrt{3}\right)^2}$ ou à $-\sqrt{\left(13+2\sqrt{3}\right)^2}$ mais comme a et positif, seule la solution positive convient soit

$$\boxed{a = 13+2\sqrt{3}}$$

. **Remarque** : puisque $13+2\sqrt{3} > 0$
$\sqrt{\left(13+2\sqrt{3}\right)^2} = \left|13+2\sqrt{3}\right| = 13+2\sqrt{3}$

3. b. Rédigeons différemment en utilisant la valeur absolue. On a

$$\left(13-2\sqrt{3}\right)^2 = 169 - 2\times 13\times 2\sqrt{3} + 4\times 3 = 181 - 52\sqrt{3}$$

soit

$$\boxed{\left(13-2\sqrt{3}\right)^2 = b^2}$$

puis en passant à la racine carrée

$$|b| = \sqrt{\left(13-2\sqrt{3}\right)^2} = \left|13-2\sqrt{3}\right| = 13-2\sqrt{3}$$

car $13-2\sqrt{3}$ est positif

Et puisque b est positif on a

$$\boxed{b = 13-2\sqrt{3}}$$

.

3. c. On retrouve alors facilement que $\boxed{a+b=26}$