



TD n°2bis - Seconde

Calculer avec une expression algébrique

Exercice 1. !Une fonction ... algébrique 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -3x^2 + 12x + 15$$

- Déterminer l'image de $\sqrt{5}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.
- Déterminer l'image de $(4 + \sqrt{7})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.
- Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{2}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = -3(-1 - x)(5 - x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les antécédents de 15 par f .
6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + kx$, avec k réel.
7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{7} - 4)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Réponses : 1. $f(\sqrt{5}) = 0 + 12\sqrt{5}$ / 2. $f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}$ / 3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}$ / 4. b. $A(-1; 0)$; $B(5; 0)$ / 5. $S = \{0; 4\}$ / 6. $f(-x) = f(x) - 24x$ / 7. $f(-\sqrt{7} - 4) = -102 - 36\sqrt{7}$

Exercice 2. !Une fonction ... algébrique 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -5x^2 + 15x - 10$$

- Déterminer l'image de $\sqrt{3}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.
- Déterminer l'image de $(-1 + \sqrt{3})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.
- Déterminer l'image de $\left(\frac{-1}{5}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = -5(1 - x)(2 - x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les antécédents de -10 par f .
6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + kx$, avec k réel.
7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{3} + 1)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Réponses : 1. $f(\sqrt{3}) = -25 + 15\sqrt{3}$ / 2. $f(-1 + \sqrt{3}) = -45 + 25\sqrt{3}$ / 3. $f\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-66}{5}$ / 4. b. $A(1; 0)$; $B(2; 0)$ / 5. $S = \{0; 3\}$ / 6. $f(-x) = f(x) - 30x$ / 7. $f(-\sqrt{3} + 1) = -15 - 5\sqrt{3}$

Exercice 3. !Une fonction ... algébrique 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 3x^2 - 21x - 24$$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{2}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.
2. Déterminer l'image de $(-2 + \sqrt{2})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.
3. Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{10}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.
- 4.
4. a. Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = 3(-1 - x)(8 - x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les antécédents de -24 par f .
6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + kx$, avec k réel.
7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{2} + 2)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Réponses : 1. $f(\sqrt{2}) = -18 - 21\sqrt{2}$ / 2. $f(-2 + \sqrt{2}) = 36 - 33\sqrt{2}$ / 3. $f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{-2607}{100}$ / 4. b. $A(-1; 0)$; $B(8; 0)$ / 5. $S = \{0; 7\}$ / 6. $f(-x) = f(x) + 42x$ / 7. $f(-\sqrt{2} + 2) = -48 + 9\sqrt{2}$

Exercice 4. !Une fonction ... algébrique 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -3x^2 + 18x + 21$$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{10}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{10}$ où a et b sont des entiers relatifs.
2. Déterminer l'image de $(-2 + \sqrt{2})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.
3. Déterminer l'image de $\left(\frac{2}{11}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.
- 4.
4. a. Montrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = -3(-1 - x)(7 - x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les antécédents de 21 par f .
6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + kx$, avec k réel.
7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{2} + 2)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Réponses : 1. $f(\sqrt{10}) = -9 + 18\sqrt{10}$ / 2. $f(-2 + \sqrt{2}) = -33 + 30\sqrt{2}$ / 3. $f\left(\frac{2}{11}\right) = \frac{2925}{121}$ / 4. b. $A(-1; 0)$; $B(7; 0)$ / 5. $S = \{0; 6\}$ / 6. $f(-x) = f(x) - 36x$ / 7. $f(-\sqrt{2} + 2) = 39 - 6\sqrt{2}$

Correction de l'exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -3x^2 + 12x + 15$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{5}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{5}) &= -3 \times (\sqrt{5})^2 + 12 \times (\sqrt{5}) + 15 \\ f(\sqrt{5}) &= \underbrace{-3 \times 5 + 15}_0 + 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(\sqrt{5}) = 0 + 12\sqrt{5}}$$

2. Déterminer l'image de $(4 + \sqrt{7})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (4 + \sqrt{7})^2 + 12 \times (4 + \sqrt{7}) + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times \left((4)^2 + 2 \times (4) \times \sqrt{7} + 7 \right) + \underbrace{12 \times (4)}_{48} + 12 \times \sqrt{7} + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (16 + 8\sqrt{7} + 7) + 48 + 12\sqrt{7} + 15 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -3 \times (23 + 8\sqrt{7}) + 12\sqrt{7} + 63 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= -69 - \underbrace{24\sqrt{7} + 12\sqrt{7}}_{-12\sqrt{7}} + 63 \\ f(4 + \sqrt{7}) &= \underbrace{-69 + 63}_{-6} - 12\sqrt{7} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}}$$

3. Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{2}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 15 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3 \times 1^2}{2^2} + \frac{12 \times 1}{2} + 15 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{-3 + 12 \times 2 + 15 \times 4}{4} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}}$$

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = -3(-1 - x)(5 - x)$.

Par définition on sait juste que pour tout réel x ,

$$f(x) = -3x^2 + 12x + 15$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à $f(x)$ surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de f . Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -3(-1 - x)(5 - x) &= -3 \left(-1 \times 5 + \underbrace{1x - 5x + x^2}_{-4x} \right) \\ -3(-1 - x)(5 - x) &= -3(-5 - 4x + x^2) \\ -3(-1 - x)(5 - x) &= \underbrace{-3x^2 + 12x + 15}_{f(x)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout réel x :

$$f(x) = -3(-1-x)(5-x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 0$. En utilisant l'expression de f démontrée lors de la question **4.a.** on obtient :

$$f(x) = 0 \iff -3(-1-x)(5-x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -1-x = 0 \quad \text{ou} \quad 5-x = 0 \\ f(x) = 0 &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 5 \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\mathcal{S}_1 = \{A(-1; 0) ; B(5; 0)\}$$

5. Déterminer les antécédents de 15 par f .

Les antécédents de 15 par f sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 15$. En utilisant l'expression initiale de f on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = 15 &\iff -3x^2 + 12x + 15 = 15 \\ f(x) = 15 &\iff -3x^2 + 12x = 0 \\ f(x) = 15 &\iff x(-3x + 12) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 15 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 12 = 0 \\ f(x) = 15 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

Les antécédents de 15 par f sont donc 0 et 4.

$$\mathcal{S}_2 = \{0 ; 4\}$$

6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) - 24x$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f(x) = -3x^2 + 12x + 15 \\ f(-x) = -3x^2 - 12x + 15 \end{cases} \implies \text{Par soustraction} \quad f(-x) - f(x) = -24x \implies f(-x) = f(x) - 24x$$

7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{7} - 4)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{7}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Lors de la question **2.** on a prouvé que :

$$f(4 + \sqrt{7}) = -6 - 12\sqrt{7}$$

De plus on a obtenu dans la question **6.** que pour tout réel x on a

$$f(-x) = f(x) - 24x$$

Or en appliquant cette égalité avec $x = 4 + \sqrt{7}$ soit $-x = -\sqrt{7} - 4$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{7} - 4) &= \underbrace{f(4 + \sqrt{7})}_{-6 - 12\sqrt{7}} - 24 \times (4 + \sqrt{7}) \\ f(-\sqrt{7} - 4) &= -6 - 12\sqrt{7} - \underbrace{24 \times 4}_{-96} - 24\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$f(-\sqrt{7} - 4) = -102 - 36\sqrt{7}$$

Correction de l'exercice 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -5x^2 + 15x - 10$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{3}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= -5 \times (\sqrt{3})^2 + 15 \times (\sqrt{3}) - 10 \\ f(\sqrt{3}) &= \underbrace{-5 \times 3 - 10}_{-25} + 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(\sqrt{3}) = -25 + 15\sqrt{3}}$$

2. Déterminer l'image de $(-1 + \sqrt{3})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(-1 + \sqrt{3}) &= -5 \times (-1 + \sqrt{3})^2 + 15 \times (-1 + \sqrt{3}) - 10 \\ f(-1 + \sqrt{3}) &= -5 \times ((-1)^2 + 2 \times (-1) \times \sqrt{3} + 3) + \underbrace{15 \times (-1)}_{-15} + 15 \times \sqrt{3} - 10 \\ f(-1 + \sqrt{3}) &= -5 \times (1 - 2\sqrt{3} + 3) - 15 + 15\sqrt{3} - 10 \\ f(-1 + \sqrt{3}) &= -5 \times (4 - 2\sqrt{3}) + 15\sqrt{3} - 25 \\ f(-1 + \sqrt{3}) &= -20 + \underbrace{10\sqrt{3} + 15\sqrt{3}}_{25\sqrt{3}} - 25 \\ f(-1 + \sqrt{3}) &= \underbrace{-20 - 25}_{-45} + 25\sqrt{3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(-1 + \sqrt{3}) = -45 + 25\sqrt{3}}$$

3. Déterminer l'image de $\left(\frac{-1}{5}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{5}\right) &= -5 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^2 + 15 \times \left(\frac{-1}{5}\right) - 10 \\ f\left(\frac{-1}{5}\right) &= \frac{-5 \times (-1)^2}{5^2} + \frac{15 \times (-1)}{5} - 10 \\ f\left(\frac{-1}{5}\right) &= \frac{-5 - 15 \times 5 - 10 \times 25}{25} \\ f\left(\frac{-1}{5}\right) &= \frac{-330}{25} = \frac{-330 \div 5}{25 \div 5} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-66}{5}}$$

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = -5(1-x)(2-x)$.

Par définition on sait juste que pour tout réel x ,

$$f(x) = -5x^2 + 15x - 10$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à $f(x)$ surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de f . Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -5(1-x)(2-x) &= -5 \left(1 \times 2 - \underbrace{1x - 2x + x^2}_{-3x} \right) \\ -5(1-x)(2-x) &= -5(2 - 3x + x^2) \\ -5(1-x)(2-x) &= \underbrace{-5x^2 + 15x - 10}_{f(x)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout réel x :

$$f(x) = -5(1-x)(2-x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 0$. En utilisant l'expression de f démontrée lors de la question 4.a. on obtient :

$$f(x) = 0 \iff -5(1-x)(2-x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 1-x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0 \\ f(x) = 0 &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\mathcal{S}_1 = \{A(1; 0); B(2; 0)\}$$

5. Déterminer les antécédents de -10 par f .

Les antécédents de -10 par f sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = -10$. En utilisant l'expression initiale de f on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = -10 &\iff -5x^2 + 15x - 10 = -10 \\ f(x) = -10 &\iff -5x^2 + 15x = 0 \\ f(x) = -10 &\iff x(-5x + 15) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = -10 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -5x + 15 = 0 \\ f(x) = -10 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-15}{-5} = 3 \end{aligned}$$

Les antécédents de -10 par f sont donc 0 et 3.

$$\mathcal{S}_2 = \{0; 3\}$$

6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) - 30x$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f(x) = -5x^2 + 15x - 10 \\ f(-x) = -5x^2 - 15x - 10 \end{cases} \implies \text{Par soustraction} \quad f(-x) - f(x) = -30x \implies f(-x) = f(x) - 30x$$

7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{3} + 1)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Lors de la question 2. on a prouvé que :

$$f(-1 + \sqrt{3}) = -45 + 25\sqrt{3}$$

De plus on a obtenu dans la question 6. que pour tout réel x on a

$$f(-x) = f(x) - 30x$$

Or en appliquant cette égalité avec $x = -1 + \sqrt{3}$ soit $-x = -\sqrt{3} + 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{3} + 1) &= \underbrace{f(-1 + \sqrt{3})}_{-45 + 25\sqrt{3}} - 30 \times (-1 + \sqrt{3}) \\ f(-\sqrt{3} + 1) &= -45 + 25\sqrt{3} - \underbrace{30 \times (-1)}_{30} - 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$f(-\sqrt{3} + 1) = -15 - 5\sqrt{3}$$

Correction de l'exercice 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 - 21x - 24$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{2}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 3 \times (\sqrt{2})^2 - 21 \times (\sqrt{2}) - 24 \\ f(\sqrt{2}) &= \underbrace{3 \times 2 - 24}_{-18} - 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(\sqrt{2}) = -18 - 21\sqrt{2}}$$

2. Déterminer l'image de $(-2 + \sqrt{2})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(-2 + \sqrt{2}) &= 3 \times (-2 + \sqrt{2})^2 - 21 \times (-2 + \sqrt{2}) - 24 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= 3 \times ((-2)^2 + 2 \times (-2) \times \sqrt{2} + 2) - \underbrace{21 \times (-2) - 21 \times \sqrt{2}}_{42} - 24 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= 3 \times (4 - 4\sqrt{2} + 2) + 42 - 21\sqrt{2} - 24 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= 3 \times (6 - 4\sqrt{2}) - 21\sqrt{2} + 18 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= +18 - \underbrace{12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}}_{-33\sqrt{2}} + 18 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= \underbrace{+18 + 18}_{36} - 33\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(-2 + \sqrt{2}) = 36 - 33\sqrt{2}}$$

3. Déterminer l'image de $\left(\frac{1}{10}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{10}\right) &= 3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 - 21 \times \left(\frac{1}{10}\right) - 24 \\ f\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{3 \times 1^2}{10^2} + \frac{-21 \times 1}{10} - 24 \\ f\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{3 - 21 \times 10 - 24 \times 100}{100} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{-2607}{100}}$$

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = 3(-1 - x)(8 - x)$.

Par définition on sait juste que pour tout réel x ,

$$f(x) = 3x^2 - 21x - 24$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à $f(x)$ surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de f . Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} 3(-1 - x)(8 - x) &= 3 \left(-1 \times 8 + \underbrace{1x - 8x}_{-7x} + x^2 \right) \\ 3(-1 - x)(8 - x) &= 3(-8 - 7x + x^2) \\ 3(-1 - x)(8 - x) &= \underbrace{3x^2 - 21x - 24}_{f(x)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout réel x :

$$f(x) = 3(-1 - x)(8 - x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 0$. En utilisant l'expression de f démontrée lors de la question **4.a.** on obtient :

$$f(x) = 0 \iff 3(-1 - x)(8 - x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -1 - x = 0 \quad \text{ou} \quad 8 - x = 0 \\ f(x) = 0 &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 8 \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\mathcal{S}_1 = \{A(-1; 0); B(8; 0)\}$$

5. Déterminer les antécédents de -24 par f .

Les antécédents de -24 par f sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = -24$. En utilisant l'expression initiale de f on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = -24 &\iff 3x^2 - 21x - 24 = -24 \\ f(x) = -24 &\iff 3x^2 - 21x = 0 \\ f(x) = -24 &\iff x(3x - 21) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = -24 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 21 = 0 \\ f(x) = -24 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{+21}{3} = 7 \end{aligned}$$

Les antécédents de -24 par f sont donc 0 et 7.

$$\mathcal{S}_2 = \{0; 7\}$$

6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) + 42x$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f(x) &= 3x^2 - 21x - 24 \\ f(-x) &= 3x^2 + 21x - 24 \end{cases} \xrightarrow{\text{Par soustraction}} f(-x) - f(x) = 42x \implies \boxed{f(-x) = f(x) + 42x}$$

7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{2} + 2)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Lors de la question **2.** on a prouvé que :

$$f(-2 + \sqrt{2}) = 36 - 33\sqrt{2}$$

De plus on a obtenu dans la question **6.** que pour tout réel x on a

$$f(-x) = f(x) + 42x$$

Or en appliquant cette égalité avec $x = -2 + \sqrt{2}$ soit $-x = -\sqrt{2} + 2$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2} + 2) &= \underbrace{f(-2 + \sqrt{2})}_{36 - 33\sqrt{2}} + 42 \times (-2 + \sqrt{2}) \\ f(-\sqrt{2} + 2) &= 36 - 33\sqrt{2} + \underbrace{42 \times (-2)}_{-84} + 42\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-\sqrt{2} + 2) = -48 + 9\sqrt{2}}$$

Correction de l'exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -3x^2 + 18x + 21$

1. Déterminer l'image de $\sqrt{10}$ par f sous la forme $a + b\sqrt{10}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{10}) &= -3 \times (\sqrt{10})^2 + 18 \times (\sqrt{10}) + 21 \\ f(\sqrt{10}) &= \underbrace{-3 \times 10 + 21}_{-9} + 18\sqrt{10} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(\sqrt{10}) = -9 + 18\sqrt{10}}$$

2. Déterminer l'image de $(-2 + \sqrt{2})$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} f(-2 + \sqrt{2}) &= -3 \times (-2 + \sqrt{2})^2 + 18 \times (-2 + \sqrt{2}) + 21 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= -3 \times ((-2)^2 + 2 \times (-2) \times \sqrt{2} + 2) + \underbrace{18 \times (-2) + 18 \times \sqrt{2}}_{-36} + 21 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= -3 \times (4 - 4\sqrt{2} + 2) - 36 + 18\sqrt{2} + 21 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= -3 \times (6 - 4\sqrt{2}) + 18\sqrt{2} - 15 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= -18 + \underbrace{12\sqrt{2} + 18\sqrt{2}}_{30\sqrt{2}} - 15 \\ f(-2 + \sqrt{2}) &= \underbrace{-18 - 15}_{-33} + 30\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f(-2 + \sqrt{2}) = -33 + 30\sqrt{2}}$$

3. Déterminer l'image de $\left(\frac{2}{11}\right)$ par f sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{11}\right) &= -3 \times \left(\frac{2}{11}\right)^2 + 18 \times \left(\frac{2}{11}\right) + 21 \\ f\left(\frac{2}{11}\right) &= \frac{-3 \times 2^2}{11^2} + \frac{18 \times 2}{11} + 21 \\ f\left(\frac{2}{11}\right) &= \frac{-12 + 36 \times 11 + 21 \times 121}{121} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{f\left(\frac{2}{11}\right) = \frac{2925}{121}}$$

4.

4. a. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) = -3(-1 - x)(7 - x)$.

Par définition on sait juste que pour tout réel x ,

$$f(x) = -3x^2 + 18x + 21$$

On va développer l'expression proposée (sans écrire qu'elle est égale à $f(x)$ surtout), puis vérifier que l'on retrouve bien l'expression développée de f . Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -3(-1 - x)(7 - x) &= -3 \left(-1 \times 7 + \underbrace{1x - 7x + x^2}_{-6x} \right) \\ -3(-1 - x)(7 - x) &= -3(-7 - 6x + x^2) \\ -3(-1 - x)(7 - x) &= \underbrace{-3x^2 + 18x + 21}_{f(x)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout réel x :

$$f(x) = -3(-1-x)(7-x)$$

4. b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 0$. En utilisant l'expression de f démontrée lors de la question **4.a.** on obtient :

$$f(x) = 0 \iff -3(-1-x)(7-x) = 0$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -1-x = 0 \quad \text{ou} \quad 7-x = 0 \\ f(x) = 0 &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 7 \end{aligned}$$

Les ordonnées de ces points d'intersection étant évidemment nulles, on obtient :

$$\mathcal{S}_1 = \{A(-1; 0) ; B(7; 0)\}$$

5. Déterminer les antécédents de 21 par f .

Les antécédents de 21 par f sont les solutions, si elles existent, de l'équation $f(x) = 21$. En utilisant l'expression initiale de f on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = 21 &\iff -3x^2 + 18x + 21 = 21 \\ f(x) = 21 &\iff -3x^2 + 18x = 0 \\ f(x) = 21 &\iff x(-3x + 18) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, et par théorème, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 21 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 18 = 0 \\ f(x) = 21 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-18}{-3} = 6 \end{aligned}$$

Les antécédents de 21 par f sont donc 0 et 6.

$$\mathcal{S}_2 = \{0; 6\}$$

6. Démontrer que pour tout réel x on a l'égalité $f(-x) = f(x) - 36x$.

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f(x) = -3x^2 + 18x + 21 \\ f(-x) = -3x^2 - 18x + 21 \end{cases} \implies \text{Par soustraction} \quad f(-x) - f(x) = -36x \implies f(-x) = f(x) - 36x$$

7. En déduire rapidement l'image de $(-\sqrt{2} + 2)$ par f sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

Lors de la question **2.** on a prouvé que :

$$f(-2 + \sqrt{2}) = -33 + 30\sqrt{2}$$

De plus on a obtenu dans la question **6.** que pour tout réel x on a

$$f(-x) = f(x) - 36x$$

Or en appliquant cette égalité avec $x = -2 + \sqrt{2}$ soit $-x = -\sqrt{2} + 2$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2} + 2) &= \underbrace{f(-2 + \sqrt{2})}_{-33 + 30\sqrt{2}} - 36 \times (-2 + \sqrt{2}) \\ f(-\sqrt{2} + 2) &= -33 + 30\sqrt{2} - \underbrace{36 \times (-2)}_{72} - 36\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$f(-\sqrt{2} + 2) = 39 - 6\sqrt{2}$$