Math93.com

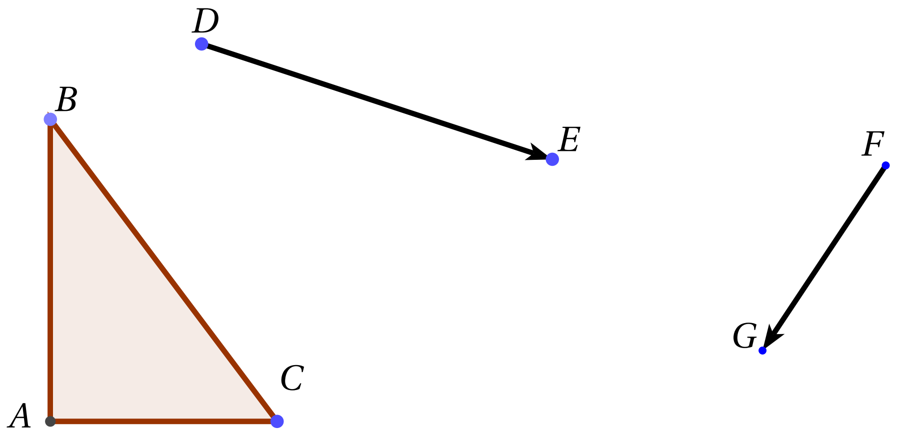
TD n°1 - Seconde
Vecteurs

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Translation et vecteurs

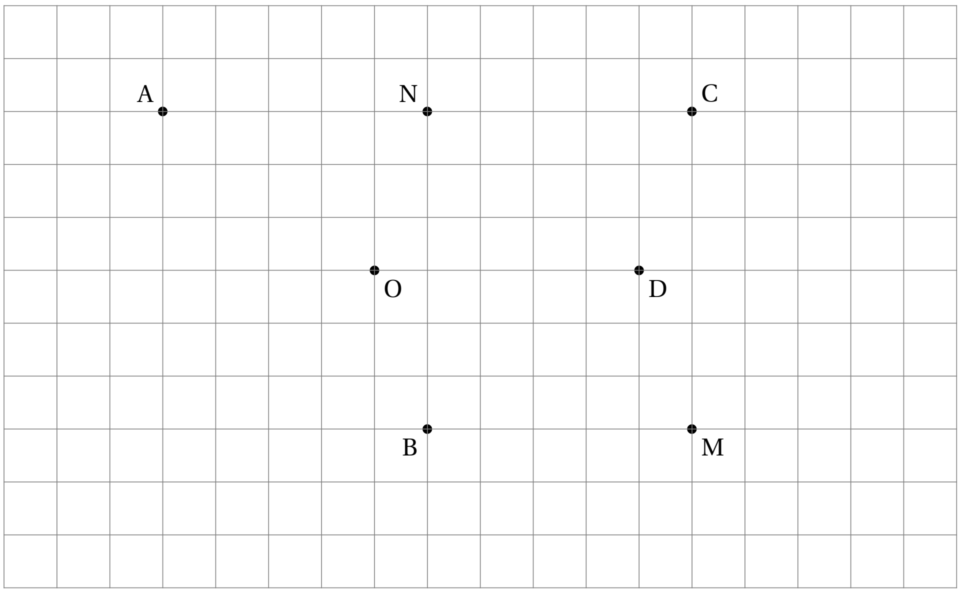
Exercice 1. Construction avec le compas (c)

Construire A'B'C', l'image du triangle rectangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ puis A"B"C", l'image du triangle A'B'C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.
Vérifier que les triangles images sont aussi rectangles.
On remarquera que si la construction est correcte, les points C et B" sont confondus .



Sommes de vecteurs et relation de Chasles

Exercice 2. Construction (Vu au Brevet)

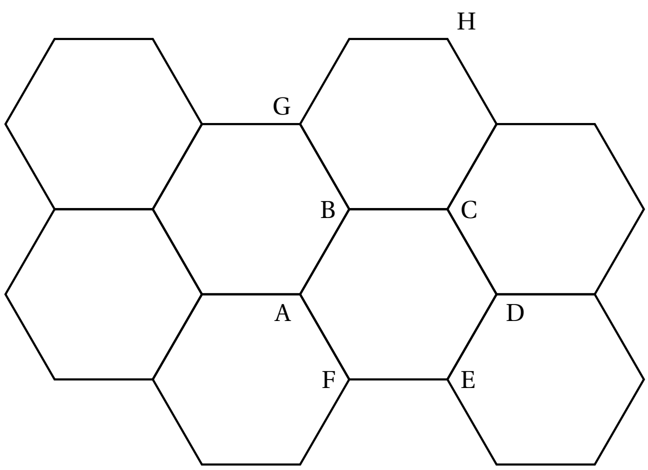


1. Quelle est l'image du quadrilatère ODMB par la symétrie d'axe (OD) ?
2. Recopier et compléter les quatre égalités ci-dessous :
   - $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\ldots\mathrm{N}}$
   - $\overrightarrow{\mathrm{M}\ldots} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
   - $\overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{NC}} = \overrightarrow{\ldots}$
   - $\overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\ldots}$
3. Quelle est l'image du triangle NOB par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$?

Exercice 3. Des hexagones (Vu au Brevet)

Sur la figure de la feuille annexe (à rendre avec la copie), sont représentés huit hexagones réguliers. Les constructions demandées dans cet exercice doivent être effectuées directement sur cette feuille annexe.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
2. Construire le point N tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}N} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}$.
3. Construire le point P tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}P} = \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}}$.



Exercice 4. Michel Chasles (1793-1880) est votre ami !

A l'aide de sa célèbre relation, démontrer les égalités suivantes :

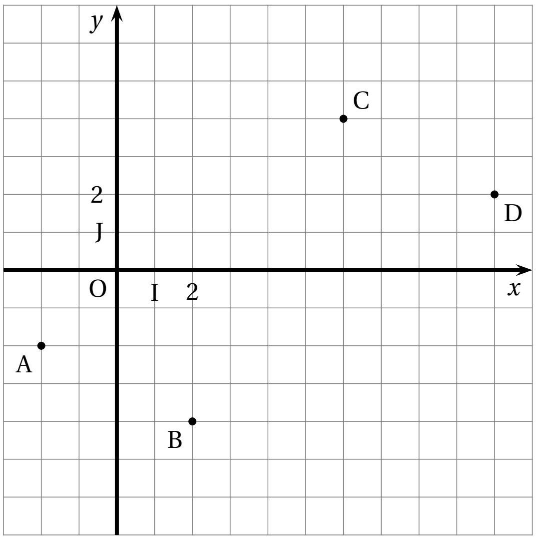
1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$;
2. $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$;
3. $\overrightarrow{FG} - \left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}\right) - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB}\right) = \overrightarrow{BF}$;
4. $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$;

Remarque :
En 1841 Chasles enseigne à l'école polytechnique puis à la Sorbonne en 1846. Il entre à l'Académie des sciences en 1851. Chasles expose la relation qui porte son nom à la page 46/643 de son Traité de géométrie supérieure (1852).

Coordonnées de vecteurs

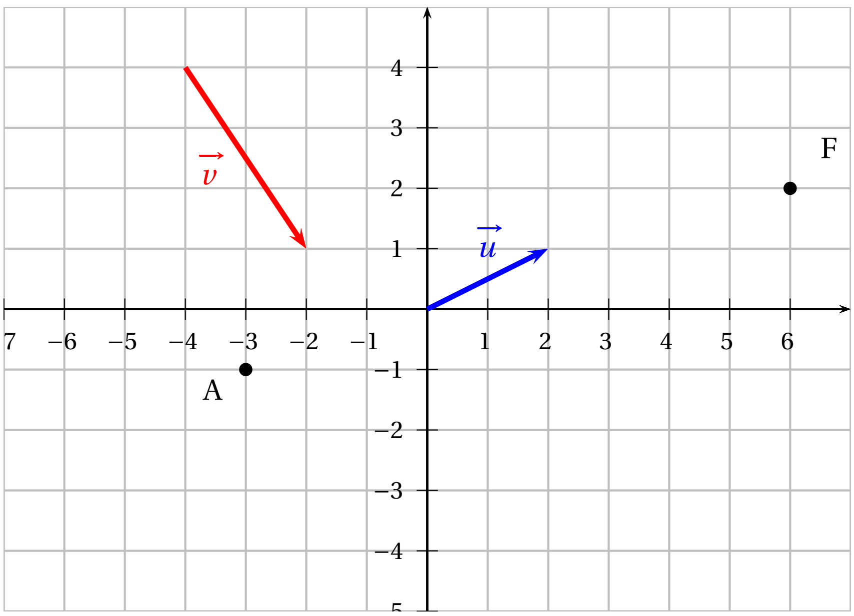
Exercice 5. Coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1. Lire les coordonnées des points A, B et C.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

Exercice 6. Construction et coordonnées



1. Lire les coordonnées les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Construire le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ puis déterminer les coordonnées de ce vecteur somme.

3. Déterminer les coordonnées du point B, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

4. Déterminer les coordonnées du point C, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ notée $t_{\overrightarrow{v}}$.

5. Déterminer les coordonnées et construire le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donner les coordonnées du point D.

6. Déterminer les coordonnées et construire le vecteur $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. Donner les coordonnées du point G.

Réponses
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$; $B(-1\ ;\ 0)$; $C(-1\ ;\ -4)$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$; $D(1\ ;\ -3)$; $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$; $G(2\ ;\ 4)$.

Exercice 7. Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan.

1. Soient les points $A(-2\ ;\ 1)$, $T(1\ ;\ 6)$, $R(3\ ;\ 3)$ et $E(0\ ;\ -2)$. Montrer que le quadrilatère ATRE est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point P, sachant que RPTE est un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point S, sachant que T est le milieu du segment [ES].

Réponses
$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $P(4\ ;\ 11)$; $S(2\ ;\ 14)$.

Exercice 8. Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan. Soient les points $A(-2\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 6)$ et $C(4\ ;\ -1)$.
Déterminer les coordonnées des points M, G, K et N sachant que :

1. $\overrightarrow{MC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
2. $\overrightarrow{BA} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG}$;
3. K est le milieu du segment [AB] ;
4. $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{BN}$.

Réponses
$M\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$; $G\left(-\dfrac{34}{3}\ ;\ -\dfrac{10}{3}\right)$; $K\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 4\right)$; $N\left(\dfrac{17}{2}\ ;\ 8\right)$.

Exercice 9. Un algorithme

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan. Soient les points $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$, $C(x_C\ ;\ y_C)$ et $D(x_D\ ;\ y_D)$.
Écrire un algorithme qui calcule les coordonnées du point D de telle façon que ABCD soit un parallélogramme.

Colinéarité

Exercice 10. Alignement de 3 points

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan. Soient les points : $A(4\,;\,1)$, $B(-2\,;\,4)$, $C(1\,;\,-6)$ et $D(12\,;\,-3)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ? Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Réponses
Non et Oui.

Exercice 11. Vecteurs colinéaires

On se place dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan. Pour quelles(s) valeurs(s) du réel x les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x-6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\x\end{pmatrix}$;

2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}9\\x-2\end{pmatrix}$.

Réponses
1°) $x=3$; *2°)* $x=5$ *ou* $x=-1$.

Exercice 12. Vecteurs colinéaires

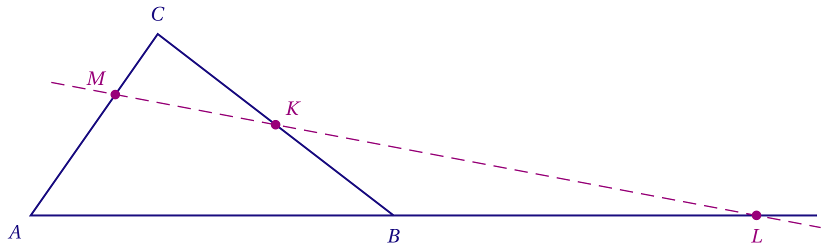
Soient E et F deux points distincts du plan et M tel que $3\overrightarrow{ME}-5\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{0}$.

1. Justifier que les points E, F et M sont alignés.
2. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{EM}=k\overrightarrow{EF}$ puis placer le point M sur la droite (EF).

Réponses
1°) $\overrightarrow{ME}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{MF}$; *2°)* $k=\dfrac{5}{2}$.

Exercice 13. Un problème (c)

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B.
Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.

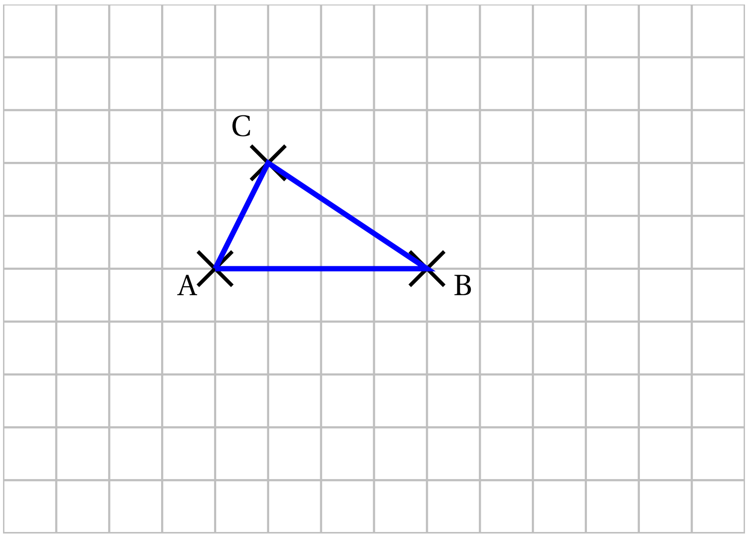


Aide

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

Problèmes de synthèse

Exercice 14. Construction et démonstration (c)



On considère un triangle ABC.

1. Construire les points I, J, K et L définis par :

   1. a. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
   1. b. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;
   1. c. $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;
   1. d. $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$;

2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.
3. Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.
4. En déduire que le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.
5. Démontrer que les points I, B, J et L sont alignés.

Exercice 15. Vecteurs et coordonnées (c)

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $D(-2\,;\,4)$, $E(-1\,;\,1)$ et $F(5\,;\,4)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. On considère les points R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{DR} = 4\,\overrightarrow{DE} \quad , \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} \quad , \quad \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$$

   Déterminer les coordonnées des points R, S et T.

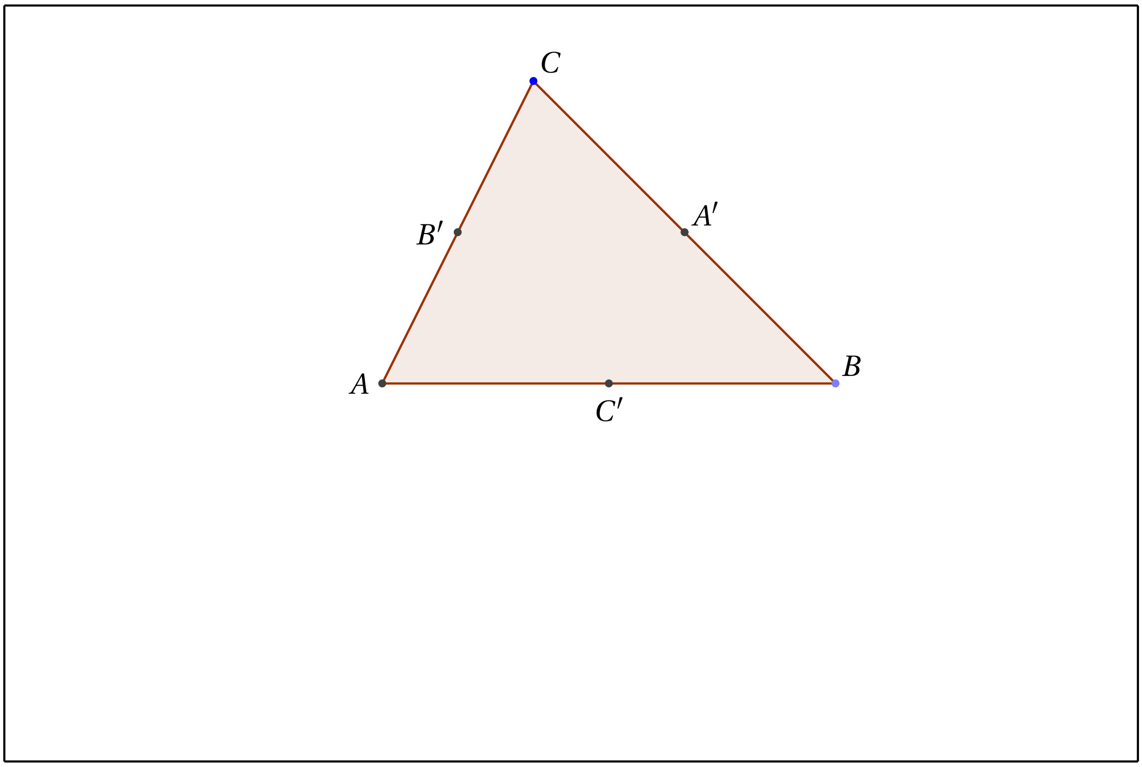
3. Démontrer que les droite (ST) et (FR) sont parallèles.
4. Montrer que les coordonnées du milieu K du segment [DR] sont $K(0\,;\,-2)$.
5. En démontrant par exemple que les vecteurs $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, prouver que les points S, T et K sont alignés.

Exercice 16. Vecteurs et coordonnées (c)

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $A(-1\,;\,-2)$, $B(5\,;\,-1)$, $C(6\,;\,3)$ et $D(0\,;\,2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
3. Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
4. Déterminer les coordonnées du point E.
5. Démontrer que : $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
6. Que peut-on en déduire sur le point B ?

Exercice 17. Les médianes ... c'est ma passion !



On considère un triangle quelconque ABC. On note A' le milieu du segment [BC], B' le milieu du segment [AC] et C' le milieu du segment [AB].

1. Construire le point C_1 tel que :

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \qquad (1)$$

2. Démontrer de deux façons différentes que :

$$\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{CC'}$$

D'une part à l'aide de la relation de Chasles et de l'égalité **(1.)**, d'autre part en utilisant le fait que par construction, $ACBC_1$ est un quadrilatère particulier.

3. On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \qquad (2)$$

3. a. Montrer en utilisant astucieusement Chasles dans la relation **(2.)** que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$$

3. b. Puis que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

3. c. En déduire que le point M appartient à la médiane (CC') puis construire ce point M.

3. d. Montrer que : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et en déduire que le point M appartient à la médiane (BB').

3. e. Montrer que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et en déduire que le point M appartient à la médiane (AA').

3. f. Que vient-on de démontrer ?

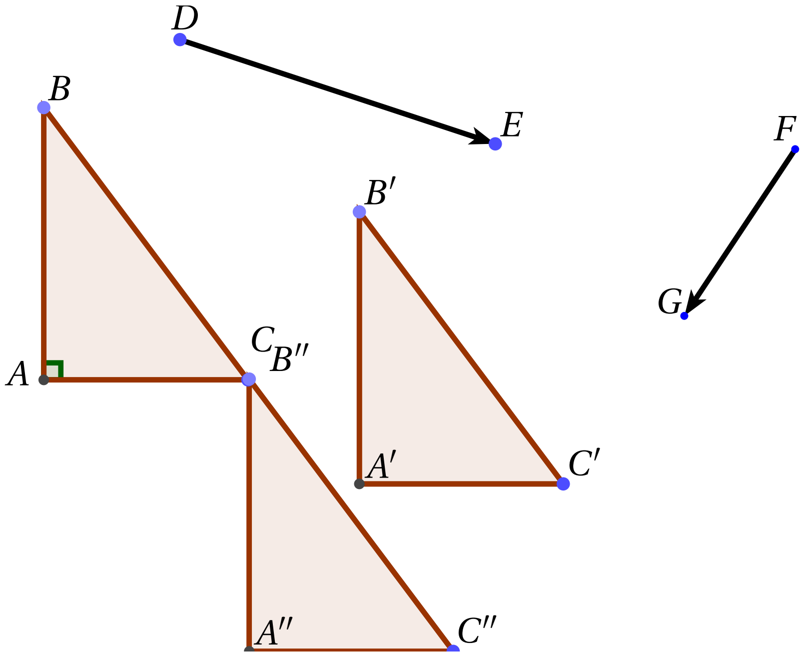
4. Construire le point A_1 tel que :

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad (3)$$

5. Démontrer B est le milieu du segment $[A_1C_1]$ puis que $\overrightarrow{A_1C_1} = 4\overrightarrow{A'C'}$.

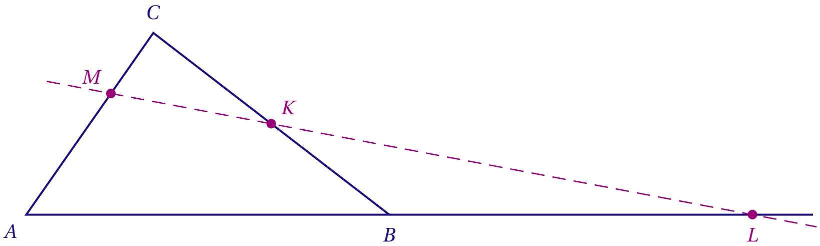
Correction

Correction de l'exercice 1



Correction de l'exercice 13

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$*, L est le symétrique du point A par rapport à B. Déterminer la position du point M sur la droite* (AC) *pour que les points K, L et M soient alignés.*



Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

- Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.
- M est un point de la droite (AC) donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0;y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

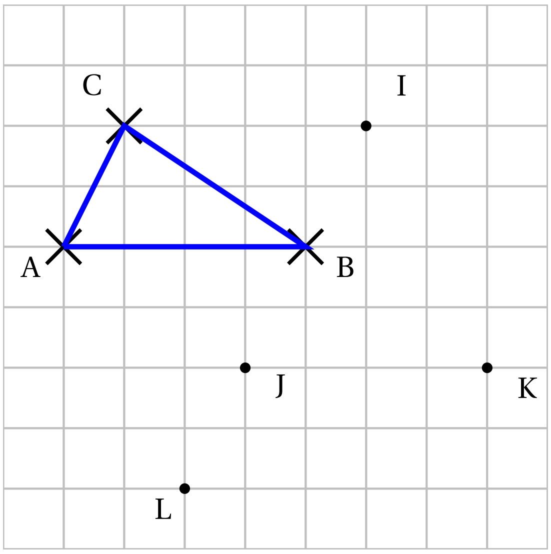
$$\text{et} \quad \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} x_M - x_L \\ y_M - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} 0-2 \\ y-0 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2} \times y - (-2) \times \frac{1}{2} = 0 \iff -\frac{3}{2} \times y = -1 \iff y = \frac{2}{3}$$

Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Correction de l'exercice 14



1. Construire les points I, J, K et L définis par :

   1. a. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

   1. b. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

   1. c. $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

   1. d. $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$;

2. **En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}\\ &= \left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}\right) + \left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\\ \overrightarrow{JK} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}}$$

3. **Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.**

   Par construction, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc le quadrilatère ABIC est un parallélogramme et de ce fait, $\boxed{\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}}$.

4. On a montré que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JK}$, soit $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JK}$ et donc le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.

correction de l'exercice 15

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points : $D(-2\,;\,4)$, $E(-1\,;\,1)$ et $F(5\,;\,4)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.
2. On considère les points R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{DR} = 4\,\overrightarrow{DE} \quad , \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} \quad , \quad \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$$

   Les coordonnées des points R, S et T sont :

$$\boxed{R(2\,;\,-8)}, \boxed{S(1{,}5\,;\,4)} \text{ et } \boxed{T(1\,;\,2)}.$$

3. **Démontrer que les droites (ST) et (FR) sont parallèles.**

   $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$ donc de façon évidente $\boxed{\overrightarrow{FR} = 6\overrightarrow{ST}}$ ce qui montre la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{ST}$. Les droites (ST) et (FR) sont donc parallèles.

4. Montrer que les coordonnées du milieu K du segment [DR] sont $K(0\,;\,-2)$.
5. On a :

$$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{TK}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires car

$$\overrightarrow{TK} = 2\overrightarrow{ST}$$

   et donc les points S, T et K sont alignés.

correction de l'exercice 16

Dans un repère du plan $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points : $A(-1\,;\,-2)$, $B(5\,;\,-1)$, $C(6\,;\,3)$ et $D(0\,;\,2)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'énoncé.

2. **Démontrer que ABCD est un parallélogramme**.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$ ce qui montre que ABCD est un parallélogramme.

3. Construire le point E tel que :
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$$

4. Le point E est de coordonnées $\boxed{E(4\,;\,-5)}$.

5. On a $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et donc
$$\boxed{\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}}$$

6. <u>Le point B est donc le milieu du segment [EC]</u> puisque $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}$.