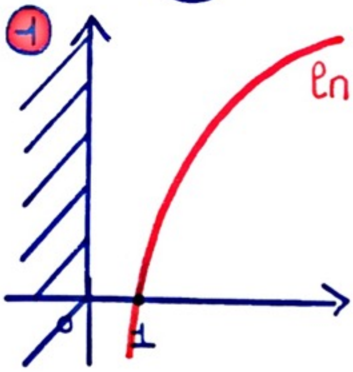
Au Boulot
les Boulets

Fiche Bilan

ln

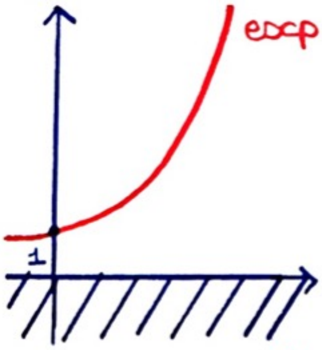
1



$]0;+\infty[$

$\ln 1 > 0$
$\ln e = 1$

exp



$\mathbb{R}$

$e^0 = 1$
$e^1 \approx 2{,}7$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\ln a^n = n \ln a$	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

$(e^x) = e^x$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$(e^a)^n = e^{na}$

$(e^u)' = u'e^u$

$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$e^{-a} = \frac{1}{e^x}$

$e^{\ln TRUC} = TRUC = \ln e^{TRUC}$ (TRUC>0)

$x^n = k \iff x = e^{\frac{\ln k}{n}}$

2 Formules de dérivée

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

3 Lectures graphiques

$f'(a)$ = Coefficient directeur de la tangente au point $A(a\,;f(a))$

$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

4 Equation tangente en $A(a\,;f(a))$

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

5 Convexité

f convexe sur I ssi * $f'' \geqslant 0$
* C_f au dessus des tangentes

⚠ concave à la cave. $f'' < 0$ sous tangente.

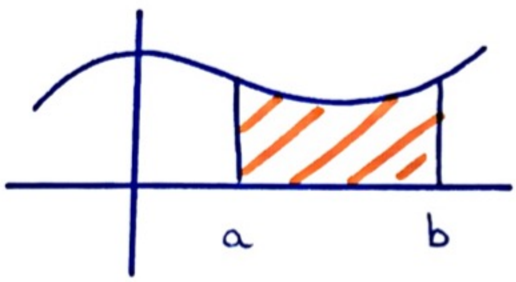
6 TVI) * continue * monotone

- f continue et monotone sur $[a, b]$
- k est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

Donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = k$ admet 1 unique solution $\alpha \in [a; b]$

7 Intégration

* F est une primitive de f si $F' = f$
* Si $f \geqslant 0$ (et continue)



Aire $\int_a^b f(x)\,dx$ (Unité d'aire) $= F(b) - F(a)$

Continuité et Convexité

1. Définition

La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est définie sur I et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu » sans lever le c[rayon] sur cet intervalle.

• Remarque

Les fonctions polynômes, rationnelles et les fonctions usuelles sont continues sur les intervalles où elles sont définies. De plus, toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse...) à partir d'un fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Exemple

Montrer la continuité de la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x}{2} + \frac{2x+2}{3x+1}$$

La fonction f est définie et continue sur son ensemble de définition I comme somme et composée de fonctions qui le sont sur cet intervalle.

2. Applications

• Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

• Les corollaires du TVI

Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

Bernard Bolzano
(1781-1848)

Exemple

x	-3		α		-1		β		0		γ		1
Var de g	-6	↗	$-1{,}5$	↗	-1	↘	$-1{,}5$	↘	-2	↗	$-1{,}5$	↗	4

• Sur $[-3;-1]$: D'après le tableau ci-dessus, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[-3;-1]$. Le réel $k=-1{,}5$ est compris entre : $f(-3)=-6<-1{,}5$
$f(-1)=-1>1{,}5$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=-1{,}5$ admet exactement une solution α appartenant à $[-3;-1]$

3. Fonction convexe, fonction concave

• Dire qu'une fonction est convexe sur I signifie que la courbe C_f est située entièrement au dessus de chacune de ses tangentes.

• Dire qu'une fonction est concave sur I signifie que la courbe C_f est située entièrement au dessous de chacune de ses tangentes.

f' croissante → f convexe
f' décroissante → f concave
} sur I

f'' positive → f convexe
f'' négative → f concave

$$f(x)=x^5-5x^4$$
$$f'(x)=5x^4-20x^3$$
$$f''(x)=20x^3-60x^2=20x^2(x-3)$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘	point d'inflexion	↗	
convexité de f		Concave		Convexe	

La fonction exponentielle

Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$

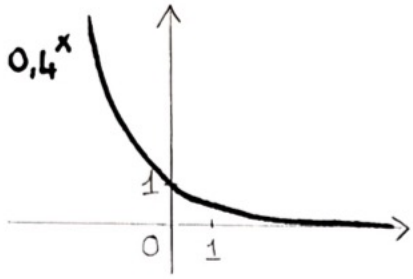
Définition : Soit q un réel strictement positif. La fonction qui, à tout entier naturel n fait correspondre q^n, se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note q^x l'image d'un réel x. La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction exponentielle.

Propriétés :
- Les fonctions expo sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, q^x est strictement positif.
- Pour tout réel q tel que $0 < q < 1$, la fonction expo est strictement décroissante
  " $q > 1$, la fonction expo est strictement croissante

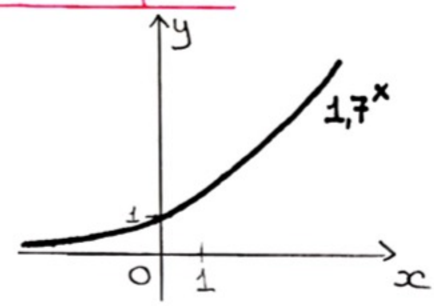
  Pour q égal à 1, la fonction expo est constante égale à 1
- Pour tout réel q strictement positif, $q^0 = 1$

Représentations graphiques

Cas où $0 < q < 1$



Cas où $q > 1$



Propriétés Soit q et r deux réels strictement positifs. Quels que soient a et b on a :

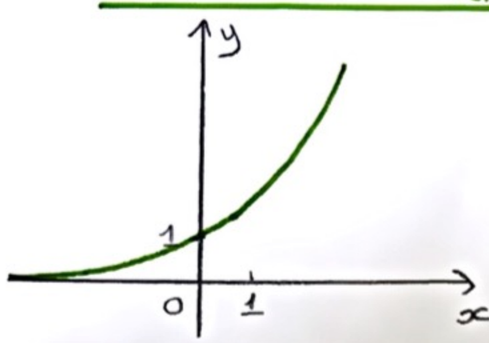
1 $\boxed{q^{-a} = \frac{1}{q^a}}$ 2 $\boxed{q^a \times q^a = (qr)^a}$ 3 $\boxed{(q^a)^b = q^{ab}}$ 4 $\boxed{\frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}}$ 5 $\boxed{q^{a+b} = q^a \times q^b}$

Fonction exponentielle

Définition : On appelle fonction expo l'unique fonction ayant 1 comme dérivée en 0.

Notations : L'image de 1 par la fonction expo est notée e. L'image d'un réel x est notée e^x. Ainsi, cette fonction expo de base e est un réel voisin de 2,718.

Propriétés : (1) La fonction expo est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est elle-M.
(2). La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriétés de la fonction exponentielle

(1) La fonction expo est continue sur $\mathbb{R}$. (2). La fonction expo est convexe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration de la convexité : La dérivée seconde de la fonction expo est égale à la fonction exponentielle. Dérivée seconde strictement positive sur $\mathbb{R}$ car fonction expo strictement positive sur $\mathbb{R}$. -> fonction expo convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

(1) Pour tous réels a et b : $e^{a+b} = e^a \times e^b$ / $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ / $e^{ab} = (e^a)^b$

Équation et inéquation

(1) Pour tous réels a et b, $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$

$e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

Fonction de la forme e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(1) La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u'e^u$.

(2) La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{e^x}$ pour $x > 0$. f est de la forme e^u, avec $u(x) = \frac{1}{x}$; u est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$; donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Des fonctions e^u particulières

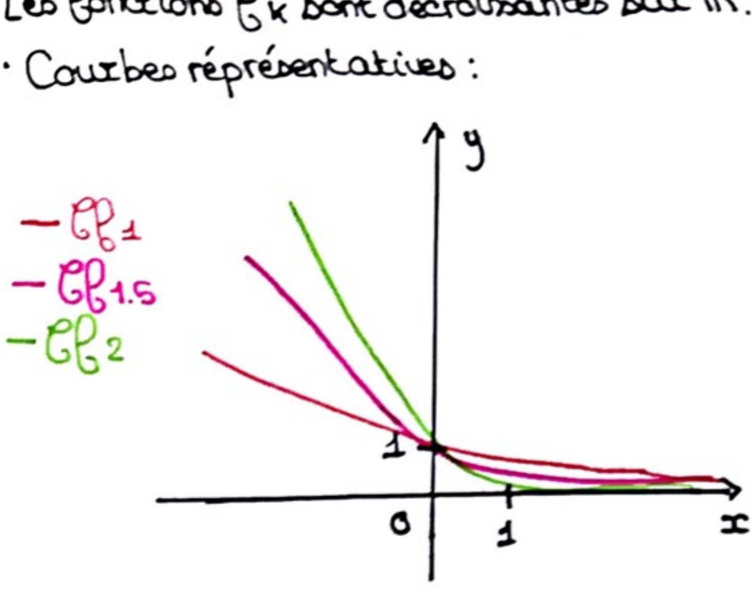
Fonctions $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, $k > 0$

- Signe : les fonctions f_k sont positives
- Sens de variation : $f'_k(x) = -ke^{-kx}$

Sachant que $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$, on en déduit que $f'_k(x) < 0$

Les fonctions f_k sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.

- Courbes représentatives :



Fonction $g_k : x \mapsto e^{-kx^2}$, $k > 0$

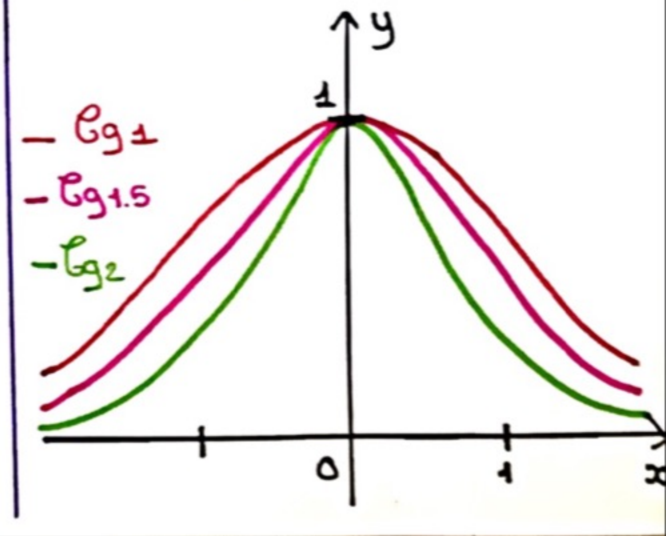
- Signe : les fonctions g_k sont positives
- Sens de variation : $g'_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$

La dérivée a le signe contraire de x.

Les fonctions g_k sont croissantes sur $]-\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$

Elles admettent 1 comme maximum atteint en 0

- Courbes représentatives :



Fonction Logarithme

① La fonction logarithme népérien

(1) On appelle logarithme néperien du réel strictement positif k, l'unique solution de l'équation d'inconnue a : $e^a = k$. On note cette solution $\ln k$ qui se lit « logarithme néperien de k ». (2) La fonction logarithme néperien est la fonction qui, à tout réel strictement positif x associe $y = \ln x$.

$$y = \ln x \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow e^y = x$$

(1) La fonction $\ln$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$
(2) Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
(3) $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

Demonstration (3) $\ln 1 = \ln(e^0) = 0$ et $\ln e = \ln(e^1)$, propriété 2

(1) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
(2) La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
(3) $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$
(4) Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \text{ et } a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

Exemples : $0 < \frac{7}{11} < 1$ donc $\ln\left(\frac{7}{11}\right) < 0$ et $\frac{15}{13} > 1$ donc $\ln\left(\frac{15}{13}\right) > 0$

② Relation fonctionnelle du logarithme néperien

Pour tout réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Exemples : $\ln 15 = \ln(3 \times 5) = \ln 3 + \ln 5$
$\ln 10 - \ln 14 = \ln(2 \times 5) - \ln(2 \times 7) = \ln 2 + \ln 5 - (\ln 2 + \ln 7) = \ln 5 + \ln 7$

Pour tout entier naturel n et tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Exemples : $\ln(5^4) = 4 \ln 5$
$\ln 8 - \ln 4 = \ln(2^3) - \ln(2^2) = 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 2$

(1) Pour tout réel strictement positif : $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^{-n}) = -n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Exemples :

- Pour a et b réels de $]0;+\infty[$, $\ln\left(\frac{a^7}{b}\right)+2\ln(a^{-3})=7\ln a-\ln b+2\times(-3)\ln a=$ $\ln a-\ln b$

③ Equation $x^n=k$ et concavité de la fonction ln

Soit x et k des réels strictement positifs et n un entier naturel
L'équation $x^n=k$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution $x=\frac{\ln k}{e^n}$

Exemples : L'équation $x^7=3$ admet comme unique solution $x=e\frac{\ln}{7}$

La fonction logarithme néperien est concave sur $]0;+\infty[$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, donc la fonction ln est concave.

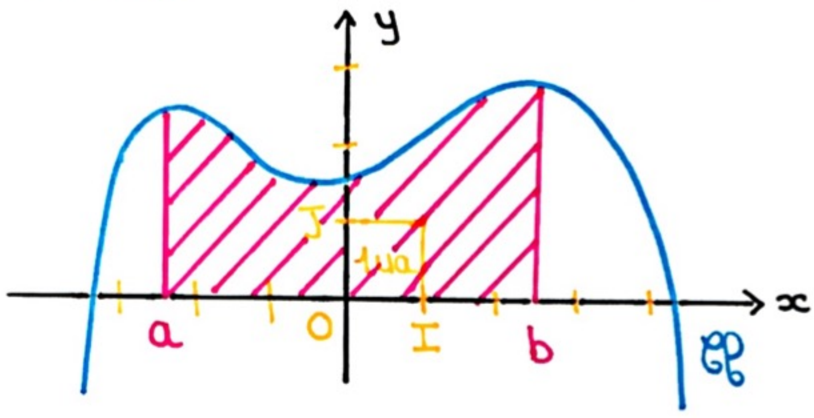
Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction logarithme néperien est au-dessous de la courbe représentative de la droite d'équation $y=x$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction logarithme au point d'abscisse 1 a pour équation $y=\frac{1}{1}\times(x-1)+\ln(1)$ soit $y=x-1$.
Or la fonction logarithme est concave donc $\mathcal{C}$ est au dessous de toutes ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente $T : y=x-1$.

Intégration

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition : Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x)\,dx$



II. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui a tout réel x de $[a;b]$ associe l'intégrale de f entre a et x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f

On a donc $\boxed{\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)}$

III. Primitive d'une fonction continue

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dér sur I telle que $\boxed{F'(x) = f(x)}$ (pour tout réel de x)

III.2. Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème 2 : Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 3 : Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G definies pour tout réel de x de x par

$\boxed{G(x) = F(x) + k}$ où k est une réel

*Exemples : corrigés des exercices

III. Primitives vérifiant une condition

Théorème 4 : Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

IV. Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par:	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = (x^{n+1})/(n+1)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$F(x) = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	"
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)\, u'(x)e^{u(x)}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$	$F(x)\, e^{u(x)}$	sur $\mathbb{R}$

V. Intégrale d'une fonction continue

Théorème 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une prim de la fonction f sur $[a;b]$. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$ que l'on note $[F(x)]_a^b$ soit $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)}$

Théorème 6 : Soit f une fonction continue sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a de I on a : $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$

Théorème 7 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

Théorème 8 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b réels appartenant à I. Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Probabilités conditionnelles

I. Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux évènemements, avec A de probabilité non nulle.
On définit la probabilité B sachant A par $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $E_1, E_2, E_3, \dots E_k$ un système complet d'évenements de l'univers Ω ayant chacun une probabilité non nulle.
Pour tout évenement A de E : $P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \dots + P(A \cap E_k)$

II. Loi binomiale

Définition : Loi Binomiale

Soit un réel p compris entre 0 et 1 et n un entier naturel non nul.
Le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètre n et p
Une variable aléatoire suit ainsi la loi binomiale de paramètres n et p notée $B(n;p)$, si :

- $X(\Omega) = \{0; 1; \dots n\}$
- Pour tout entier $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de possibilités de placer les k succès parmis les n répétitions.

Théoreme

Espérance et variance d'une loi binomiale
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p on a :

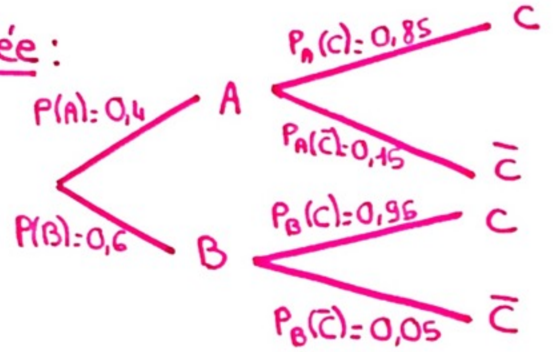
$$E(X) = np$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Excercice type corrigé

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B. Il a été constaté que 85 % des pommes provenant de A sont commercialisable et de 95 % pour le fournisseur B. Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A »
- B : « La pomme provient du fournisseur B »
- C : « La pomme est commercialisable ».

Arbre pondérée :



Montrer que la prob que la pomme ne soit pas commerciable est de 0,09

D'après la formule des probabilités totales :

$P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap A) + P(\overline{C} \cap B)$

Or $P(\overline{C} \cap A) = P_A(\overline{C}) \times P(A)$ soit $P(\overline{C} \cap A) = 0,15 \times 0,4 = 0,06$

et $P(\overline{C} \cap \overline{B}) = P_B(\overline{C}) \times P(B)$ soit $P(\overline{C} \cap B) = 0,05 \times 0,6 = 0,03$

d'où $P(\overline{C}) = 0,06 + 0,03 = 0,09$

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisament important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

Le tirage des 15 pommes peut être assimilée à la répetition de manière indépendante de 15 épreuves de Bernoulli identiques dont la probabilité du succès est $p = 1 - 0,09 = 0,91$.

La loi de proba de la variable aléatoire X égale au nombre de pommes commercialisables est une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,91$

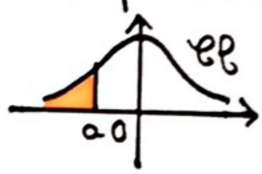
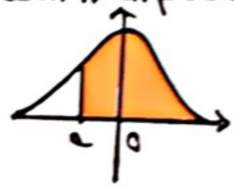
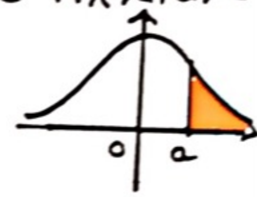
$$P(X = 15) = 0,91^{15} \approx 0,243$$

directement avec la calculatrice également.

Loi normale centrée réduite

1) Définition : La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

2) Calcul de probabilité pour une variable aléatoire X suivant $\mathcal{N}(0;1)$

Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<0$	$P(X<a)$ pour $a>0$	$P(X>a)$ pour $a<0$	$P(X>a)$ $a>0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<0)$	$0{,}5+P(0<X<a)$	$P(a<X<0)+0{,}5$	$0{,}5-P(0<X<a)$

Propriété Pour tous réels a et b

(1) $P(X\leq -a)=P(X\geq a)$

(2) $\phi(-a)=1-\phi(a)$

(3) $P(-a\leq X\leq a)=2\phi(a)-1$

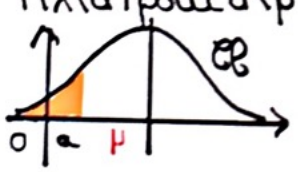
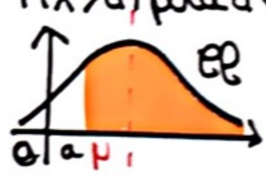
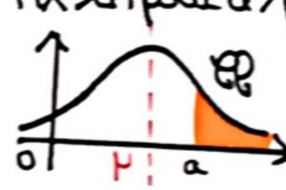
(4) $P(-1{,}96\leq X\leq 1{,}96)\approx 0{,}95$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

1) Définition : Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,\sigma^2)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

Propriété : Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,\sigma^2)$ alors son espérance mathématique μ

2) Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X

Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<\mu$	$P(X<a)$ pour $a>\mu$	$P(X>a)$ pour $a<\mu$	$P(X>a)$ pour $a>\mu$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<\mu)$	$0{,}5+P(\mu<X<a)$	$P(a<X<\mu)+0{,}5$	$0{,}5-P(\mu<X<a)$

Propriétés :

(1) $P(\mu-\sigma\leq X\leq \mu+\sigma)\approx 0{,}683$

(2) $P(\mu-2\sigma\leq X\leq \mu+2\sigma)\approx 0{,}954$

(3) $P(\mu-3\sigma\leq X\leq \mu+3\sigma)\approx 0{,}997$

Lois de probabilité à densité et loi uniforme

1) Lois de probabilité à densité

Définition : On appelle fonction de densité de probabilité sur l'intervalle I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f soit égale à 1.
On appelle une variable aléatoire à densité X sur un intervalle I définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité de f définie sur I.
La probabilité pour que X appartienne à un intervalle [a ; b] est égale à l'aire sous la courbe de f de [a ; b].

Propriété : Pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle I :
(1) $P(a<X<b) = P(X<b) - P(X\leqslant a)$
(2) $P(X<b) = P(X\leqslant b)$
(3) $P(a<X<b) = P(a\leqslant X<b) = P(a<X\leqslant b) = P(a\leqslant X\leqslant b)$
(4) $P(X>a) = P(X\geqslant a)$

2) Espérance mathématique

Définition : Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle [a ; b], alors l'espérance mathématique de X est le réel défini par
$E(X) = \int_a^b t f(t) dx$

3) Loi uniforme sur [a ; b]

Définition : a et b sont 2 nombres réels tels que a < b. La loi uniforme sur [a ; b] est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur [a ; b] par $f(t) = \frac{1}{b-a}$

Propriétés : Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [a ; b].
(1) Pour tout réel X appartenant à [a ; b], on a $P(a\leqslant X\leqslant x) = \frac{x-a}{b-a}$
(2) $E(x) = \frac{a+b}{2}$

Suites

Arithmétiques

$U_{n+1} = U_n + r$

$U_{n-1} \xrightarrow{+r} U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$

Géométriques

$U_{n+1} = U_n \times q$

$U_{n-1} \xrightarrow{\times q} U_n \xrightarrow{\times q} U_{n+1}$

Terme général

$U_n = U_p + (n-p) \times r$

Ex : $U_n = U_0 + nr$

Terme général

$U_n = U_p \times q^{n-p}$

Ex : $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = U_1 \times q^{n-1}$

Somme

$\sum$ termes suite géo

$S = 1^{er}$ terme Somme $\times \dfrac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}$

Variations

① Cas général

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Etudier le signe de } (U_{n+1} - U_n) \\ \text{si } \oplus \text{ alors } \nearrow \\ \text{si } \ominus \text{ alors } \searrow\end{array}}$

② Si (U_n) est géométrique

Si 1^{er} terme > 0 → si $0 < q < 1$ → suite décroissante
↘ si $q > 1$ → suite croissante

Si 1^{er} terme < 0 → si $0 < q < 1$ → suite croissante
↘ si $q > 1$ → suite décroissante

Limites de (q^n)

① Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

② Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

③ Si $q < -1$ pas de limites

Par excemple

Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\boxed{a_n = 200 \times 0{,}75^n + 500}$$

Ici, $-1 < q = 0{,}75 < 1$ et d'après le théorème 2, la suite geo de terme général $0{,}75^n$ converge vers 0 et :

$$\lim_{n \to \infty} (0{,}75)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 200 \times (0{,}75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

$$\lim_{n \to \infty} 200 \times 0{,}75^n + 500 \text{ soit } \boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 500}$$