La fonction exponentielle

Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$

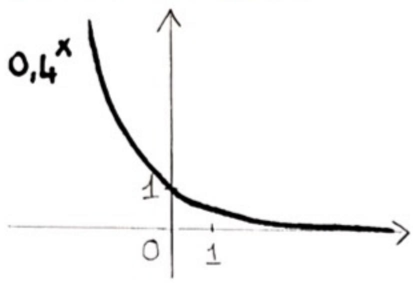
Définition : Soit q un réel strictement positif. La fonction qui, à tout entier naturel n fait correspondre q^n, se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note q^x l'image d'un réel x. La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction exponentielle.

Propriétés :
- Les fonctions expo sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, q^x est strictement positif.
- Pour tout réel q tel que $0 < q < 1$, la fonction expo est strictement décroissante
- " $q > 1$, la fonction expo est strictement croissante

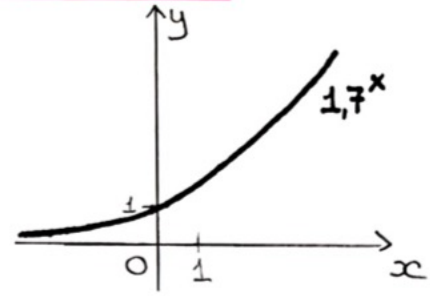
Pour q égal à 1, la fonction expo est constante égale à 1
- Pour tout réel q strictement positif, $q^0 = 1$

Représentations graphiques

Cas où $0 < q < 1$



Cas où $q > 1$



Propriétés Soit q et r deux réels strictement positifs. Quels que soient a et b on a :

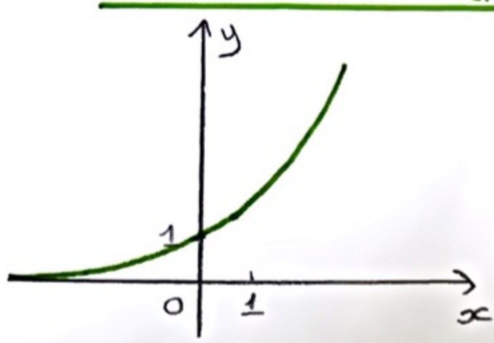
(1) $\boxed{q^{-a} = \frac{1}{q^a}}$ (2) $\boxed{q^a \times q^a = (qr)^a}$ (3) $\boxed{(q^a)^b = q^{ab}}$ (4) $\boxed{\frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}}$ (5) $\boxed{q^{a+b} = q^a \times q^b}$

Fonction exponentielle

Définition : On appelle fonction expo l'unique fonction ayant 1 comme dérivée en 0.

Notations : L'image de 1 par la fonction expo est notée e. L'image d'un réel x est notée e^x. Ainsi, cette fonction expo de base e est un réel voisin de $2,718$.

Propriétés : (1) La fonction expo est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est elle-M.
(2). La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriétés de la fonction exponentielle

(1) La fonction expo est continue sur $\mathbb{R}$. (2). La fonction expo est convexe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration de la convexité : La dérivée seconde de la fonction expo est égale à la fonction exponentielle. Dérivée seconde strictement positive sur $\mathbb{R}$ car fonction expo strictement positive sur $\mathbb{R}$. -> fonction expo convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriétés

(1) Pour tous réels a et b : $e^{a+b} = e^a \times e^b$ / $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ / $e^{ab} = (e^a)^b$

Équation et inéquation

(1) Pour tous réels a et b, $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$
$e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

Fonction de la forme e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
(1) La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u'e^u$.
(2) La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{e^x}$ pour $x > 0$. f est de la forme e^u, avec $u(x) = \frac{1}{x}$; u est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$; donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Des fonctions e^u particulières

Fonctions $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, $k > 0$

- Signe : les fonctions f_k sont positives
- Sens de variation : $f'_k(x) = -ke^{-kx}$

Sachant que $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$, on en déduit que $f'_k(x) < 0$

Les fonctions f_k sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.

- Courbes représentatives :

Fonction $g_k : x \mapsto e^{-kx^2}$, $k > 0$

- Signe : les fonctions g_k sont positives
- Sens de variation : $g'_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$

La dérivée a le signe contraire de x.
Les fonctions g_k sont croissantes sur $]-\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$
Elles admettent 1 comme maximum atteint en 0

- Courbes représentatives :