Fonction Logarithme

① La fonction logarithme népérien

(1) On appelle logarithme néperien du réel strictement positif k, l'unique solution de l'équation d'inconnue a : $e^a = k$. On note cette solution $\ln k$ qui se lit « logarithme néperien de k ». (2) La fonction logarithme néperien est la fonction qui, à tout réel strictement positif x associe $y = \ln x$.

$$y = \ln x \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow e^y = x$$

(1) La fonction $\ln$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$
(2) Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
(3) $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

Demonstration (3) $\ln 1 = \ln(e^0) = 0$ et $\ln e = \ln(e^1)$, propriété 2

(1) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
(2) La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
(3) $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$
(4) Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \text{ et } a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

Exemples : $0 < \frac{7}{11} < 1$ donc $\ln\left(\frac{7}{11}\right) < 0$ et $\frac{15}{13} > 1$ donc $\ln\left(\frac{15}{13}\right) > 0$

② Relation fonctionnelle du logarithme néperien

Pour tout réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Exemples : $\ln 15 = \ln(3 \times 5) = \ln 3 + \ln 5$
$\ln 10 - \ln 14 = \ln(2 \times 5) - \ln(2 \times 7) = \ln 2 + \ln 5 - (\ln 2 + \ln 7) = \ln 5 + \ln 7$

Pour tout entier naturel n et tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Exemples : $\ln(5^4) = 4 \ln 5$
$\ln 8 - \ln 4 = \ln(2^3) - \ln(2^2) = 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 2$

(1) Pour tout réel strictement positif : $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^{-n}) = -n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Exemples :

- Pour a et b réels de $]0;+\infty[$, $\ln\left(\frac{a^7}{b}\right) + 2\ln(a^{-3}) = 7\ln a - \ln b + 2\times(-3)\ln a =$ $\ln a - \ln b$

③ Equation $x^n = k$ et concavité de la fonction ln

Soit x et k des réels strictement positifs et n un entier naturel
L'équation $x^n = k$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution $x = \frac{\ln k}{e^n}$

Exemples : L'équation $x^7 = 3$ admet comme unique solution $x = e\,\frac{\ln}{7}$

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc la fonction ln est concave.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction logarithme népérien est au-dessous de la courbe représentative de la droite d'équation $y = x$.

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction logarithme au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \frac{1}{1}\times(x-1) + \ln(1)$ soit $y = x-1$.
Or la fonction logarithme est concave donc $\mathcal{C}$ est au dessous de toutes ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente $T : y = x-1$.