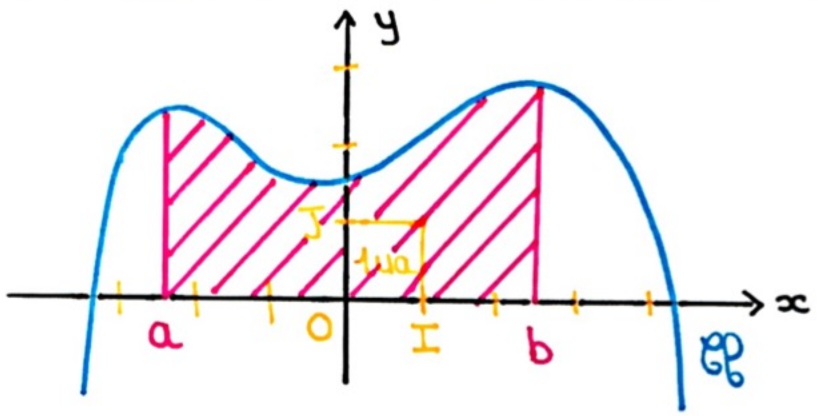
Intégration

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition : Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unités d'aire, du domaine D_f compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x)\,dx$



II. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui a tout réel x de $[a;b]$ associe l'intégrale de f entre a et x

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

On a donc $\boxed{\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)}$

III. Primitive d'une fonction continue

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dér sur I telle que $\boxed{F'(x)=f(x)}$ (pour tout réel de x)

III.2. Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème 2 : Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 3 : Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G definies pour tout réel de x de x par

$\boxed{G(x)=F(x)+k}$ où k est une réel

* Exemples : corrigés des exercices

III. Primitives vérifiant une condition

Théorème 4 : Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I
Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

IV. Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par :	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = (x^{n+1})/(n+1)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$F(x) = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	"
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)\ u'(x)e^{u(x)}$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$	$F(x)\ e^{u(x)}$	sur $\mathbb{R}$

V. Intégrale d'une fonction continue

Théorème 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une prim de la fonction f sur $[a;b]$. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$ que l'on note $[F(x)]_a^b$ soit $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

Théorème 6 : Soit f une fonction continue sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a de I on a : $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

Théorème 7 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Théorème 8 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b réels appartenant à I. Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$$