Probabilités conditionnelles

I. Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux évènemements, avec A de probabilité non nulle.
On définit la probabilité B sachant A par $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $E_1, E_2, E_3, \dots E_k$ un système complet d'évenements de l'univers Ω ayant chacun une probabilité non nulle.
Pour tout évenement A de E : $P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \dots + P(A \cap E_k)$

II. Loi binomiale

Définition : Loi Binomiale

Soit un réel p compris entre 0 et 1 et n un entier naturel non nul.
Le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètre n et p
Une variable aléatoire suit ainsi la loi binomiale de paramètres n et p notée $B(n;p)$, si :

- $X(\Omega) = \{0; 1; \dots n\}$
- Pour tout entier $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de possibilités de placer les k succès parmis les n répétitions.

Théorème

Espérance et variance d'une loi binomiale
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p on a :

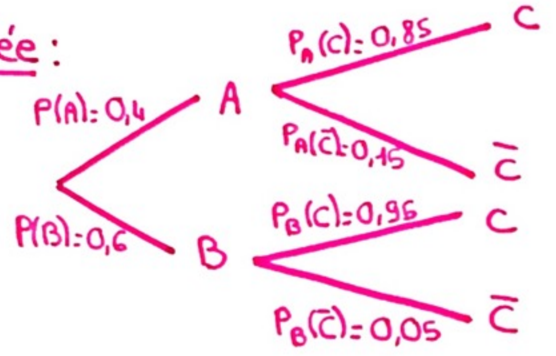
$$E(X) = np$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Exercice type corrigé

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B. Il a été constaté que 85 % des pommes provenant de A sont commercialisable et de 95 % pour le fournisseur B. Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A »
- B : « La pomme provient du fournisseur B »
- C : « La pomme est commercialisable ».

Arbre pondérée :



Montrer que la prob que la pomme ne soit pas commercialisable est de 0,09

D'après la formule des probabilités totales :

$P(\overline{C})=P(\overline{C}\cap A)+P(\overline{C}\cap B)$

Or $P(\overline{C}\cap A)=P_A(\overline{C})\times P(A)$ soit $P(\overline{C}\cap A)=0,15\times 0,4=0,06$

et $P(\overline{C}\cap \overline{B})=P_B(\overline{C})\times P(B)$ soit $P(\overline{C}\cap B)=0,05\times 0,6=0,03$

d'où $P(\overline{C})=0,06+0,03=0,09$

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisament important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

Le tirage des 15 pommes peut être assimilée à la répétition de manière indépendante de 15 épreuves de Bernoulli identiques dont la probabilité du succès est $p=1-0,09=0,91$.

La loi de proba de la variable aléatoire X égale au nombre de pommes commercialisables est une loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0,91$

$$P(X=15)=0,91^{15}\approx 0,243$$

directement avec la calculatrice également.