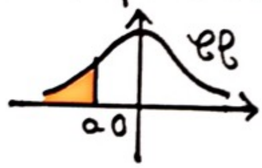
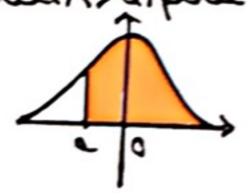
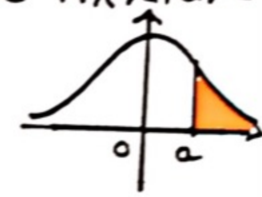
Loi normale centrée réduite

1) Définition : La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

2) Calcul de probabilité pour une variable aléatoire X suivant $\mathcal{N}(0;1)$

Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<0$	$P(X<a)$ pour $a>0$	Pour$(X>a)$ pour $a<0$	$P(X>a)$ $a>0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<0)$	$0{,}5+P(0<X<a)$	$P(a<X<0)+0{,}5$	$0{,}5-P(0<X<a)$

Propriété Pour tous réels a et b

(1) $P(X\leq -a)=P(X\geq a)$ (2) $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

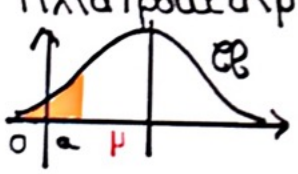
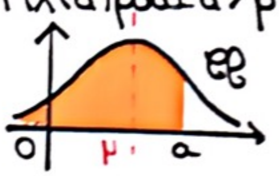
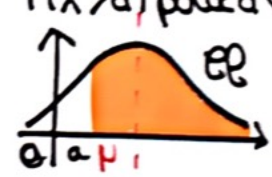
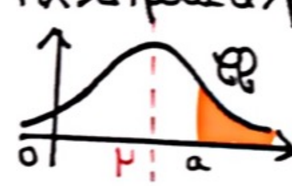
(3) $P(-a\leq X\leq a)=2\Phi(a)-1$ (4) $P(-1{,}96\leq X\leq 1{,}96)\approx 0{,}95$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

1) Définition : Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,\sigma^2)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

Propriété : Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,\sigma^2)$ alors son esperance mathematique μ

2) Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X

Probabilité	$P(X<a)$ pour $a<\mu$	$P(X<a)$ pour $a>\mu$	$P(X>a)$ pour $a<\mu$	$P(X>a)$ pour $a>\mu$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<\mu)$	$0{,}5+P(\mu<X<a)$	$P(a<X<\mu)+0{,}5$	$0{,}5-P(\mu<X<a)$

Propriétés : (1) $P(\mu-\sigma\leq X\leq \mu+\sigma)\approx 0{,}683$

(2) $P(\mu-2\sigma\leq X\leq \mu+2\sigma)\approx 0{,}954$

(3) $P(\mu-3\sigma\leq X\leq \mu+3\sigma)\approx 0{,}997$

Lois de probabilité à densité et loi uniforme

1) Lois de probabilité à densité

Définition : On appelle <u>fonction de densité de probabilité</u> sur l'intervalle I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f soit égale à 1.
On appelle une <u>variable aléatoire à densité</u> X sur un intervalle I définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité de f définie sur I.
La probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a ; b]$ est égale à l'aire sous la courbe de f de $[a ; b]$.

Propriété : Pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle I :
(1) $P(a<X<b) = P(X<b) - P(X \leq a)$
(2) $P(X<b) = P(X \leq b)$
(3) $P(a<X<b) = P(a \leq X<b) = P(a<X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$
(4) $P(X>a) = P(X \geq a)$

2) Espérance mathématique

Définition : Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel défini par
$E(X) = \int_a^b t f(t) dx$

3) Loi uniforme sur $[a ; b]$

Définition : a et b sont 2 nombres réels tels que $a<b$. La loi uniforme sur $[a ; b]$ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a ; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$

Propriétés : Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a ; b]$.
(1) Pour tout réel X appartenant à $[a ; b]$, on a $P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$
(2) $E(x) = \frac{a+b}{2}$