



Math93.com

Devoir Surveillé n°5

Terminale ES/L
Fonctions logarithme et exponentielle
 Durée 2 heures - Coeff. 8
 Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1.

7 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0 ; 3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x \ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros. La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I .

Partie A

La courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

- 1. a. Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
- 1. b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x .
- 1. c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	1	3
Variations de B'	$B'(1)$	$B'(3)$

- 2. a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .
- 2. b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.
- 3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

Exercice 2. Les suites, comme au Bac**5 points**

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 0,9 \times u_n + 2 \end{cases} \quad \left| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 20 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = -19 \times (0,9)^n + 20$$

3. Donner la limite de la suite (u_n) .
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 19$.
5. [Bonus] Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3. Position relative**2 points**

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) - 2x$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à T ?

Exercice 4. Position relative ... encore !**6 points**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

\mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1.
 1. a. Montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$$

1. b. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

2. On admet que pour tout réel x :

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$$

Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1}).$$

3. a. Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.
3. b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.
3. c. En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

∞ Fin du devoir ∞

ANNEXE à l'exercice 1

