



Math93.com

Devoir Surveillé n°6

Correction

Terminale ES/L

Intégrales et primitives

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20.5 points

Exercice 1. Application du cours

4 points

1. [2 pts] Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

- La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives qui sont de la forme :

$$F_k(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 3x + k = \underline{2x^3 - 2x^2 + 3x + k}$$

- La primitive qui s'annule en 0 vérifie $F_k(0) = 0$ soit :

$$F_k(0) = 0 \iff \underbrace{2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 3 \times 0 + k}_0 = 0 \iff k = 0$$

C'est donc la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$$

2. [1 pt] Calculer : $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= F(2) - F(0) \\ &= (2 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2) - 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 14$$

3. [1 pt] En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx \implies m = \frac{1}{2-0} \times \int_0^2 f(x) dx = \frac{14}{2} = 7$$

Exercice 2.

5 points

Soit g et G définies sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $G(x) = (\ln x)^2$.

1. [1.5 point] Démontrer que G est une primitive de g .

La fonction G est une primitive de g si elle est dérivable et que $G' = g$.

Or G est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Elle est de la forme u^2 donc de dérivée $2u'u$ avec pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$G'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

$$G'(x) = 2 \times \frac{\ln x}{x}$$

$$G'(x) = \underline{g(x)}$$

G est bien une primitive de g

2. [1 point] Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = e$.

Les primitives de g sont de la forme $H_k(x) = G(x) + k = (\ln x)^2 + k$ donc la primitive de g qui s'annule pour $x = e$ vérifie :

$$H_k(e) = 0 \iff G(e) + k = 0 \iff \underbrace{(\ln e)^2}_{1^2} + k = 0 \iff k = -1$$

Soit

$$\boxed{H(x) = (\ln x)^2 - 1}$$

3. [1.5 point] Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

On remarque que

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x} = 2 \times \frac{\ln x}{x} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2} \times g(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \frac{1}{2} \times \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx \\ \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \frac{1}{2} \times \int_1^e g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \times (G(e) - G(1)) \\ &= \frac{1}{2} \times \underbrace{((\ln e)^2 - (\ln 1)^2)}_{1-0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}}$$

4. [1 point] Calculer la valeur moyenne de g sur $[1 ; e]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

Soit

$$m = \frac{1}{e-1} \times \int_1^e g(x) dx = \frac{1}{e-1} \times \underbrace{(G(e) - G(1))}_1$$

$$\boxed{m = \frac{1}{e-1}}$$

Exercice 3.**4.5 points**

Soit h et H définies sur \mathbb{R} par : $h(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}$ et $H(x) = x e^{1-x^2}$.

1. [2 points] Démontrer que H est une primitive de h .

La fonction H est une primitive de h si elle est dérivable et que $H' = h$.

Or H est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Elle est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec pour tout x de $]0; +\infty[$:

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^{1-x^2}$	$v'(x) = -2x e^{1-x^2}$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$H'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x e^{1-x^2})$$

$$H'(x) = 1 \times e^{1-x^2} - 2x^2 \times e^{1-x^2}$$

$$H'(x) = (1 - 2x^2) \times e^{1-x^2}$$

$$H'(x) = \underline{h(x)}$$

H est bien une primitive de h

2. [1.5 point] Calculer : $\int_0^1 h(x) dx$.

$$\int_0^1 h(x) dx = H(1) - H(0)$$

$$= 1 \times e^{1-1^2} - \underbrace{0 \times e^{1-0^2}}_0$$

$$\int_0^1 h(x) dx = \underline{e^0 = 1}$$

$$\boxed{\int_0^1 h(x) dx = 1}$$

3. [1 point] En déduire la valeur de : $\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx$.

On remarque que :

$$(2 - 4x^2) e^{1-x^2} = 2 \times (1 - 2x^2) e^{1-x^2} = 2 \times h(x)$$

Donc

$$\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx = 2 \times \int_0^1 (1 - 2x^2) e^{1-x^2} dx$$

$$= 2 \times \int_0^1 h(x) dx$$

$$\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx = \underline{2 \times 1}$$

$$\boxed{\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx = 2}$$

Bonus

Calculer : $\int_0^1 (3 - 6t^2) e^{-t^2} dt$

L'astuce est de remarquer que pour tout réel t on a :

$$(3 - 6t^2) e^{-t^2} = 3 \times (1 - 2t^2) e^{-1} e^{1-t^2} = 3e^{-1} \times h(t)$$

Donc

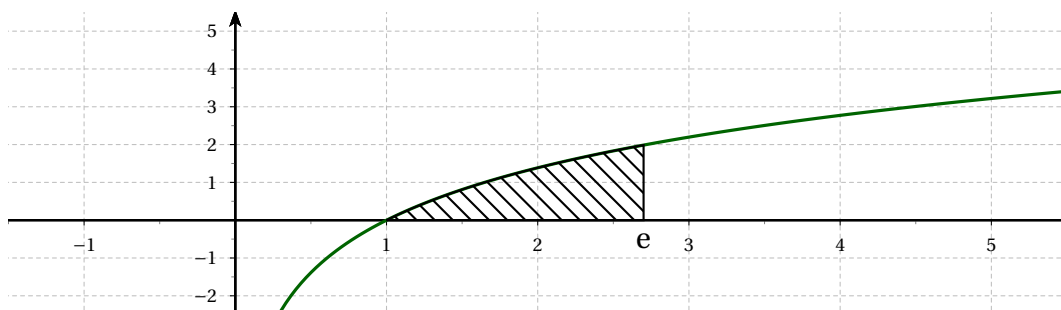
$$\int_0^1 (3 - 6t^2) e^{-t^2} dt = 3e^{-1} \times \int_0^1 h(t) dt = 3e^{-1} \times 1 = \underline{3e^{-1}}$$

Exercice 4. Un encadrement

7 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 \ln x$$



1. [0.75 point] On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.

Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

2. [0.75 point] Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.

Un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée est :

$$\boxed{1 < \mathcal{A} < 4}$$

3. [2 points] Montrer qu'une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est : $F(x) = 2x \ln x - 2x$.

La fonction F est définie et dérivable sur I . Elle est de la forme $uv - w$ donc de dérivée $u'v + uv' - w'$ avec pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

$u(x) = 2x$	$u'(x) = 2$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$w(x) = 2x$	$w'(x) = 2$

Pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

$$F'(x) = 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2$$

$$F'(x) = 2 \ln x + 2 - 2$$

$$F'(x) = 2 \ln x$$

$$F'(x) = \underline{f(x)}$$

La dérivée de F sur $]0; +\infty[$ est donc f ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

4. [1.5 point] Montrer que l'intégrale sur $[1; e]$ de f est : $\int_1^e 2 \ln x \, dx = 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^e 2 \ln x \, dx &= F(e) - F(1) \\ &= (2 \times e \ln e - 2e) - (2 \times 1 \ln 1 - 2 \times 1) \\ &= \underbrace{(2e - 2e)}_0 - \left(\underbrace{2 \ln 1}_0 - 2 \times 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e 2 \ln x \, dx = 2}$$

5. [2 points] On a tracé ci-dessous (T) , la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1. La tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$. On admet que (T) est située au dessus de \mathcal{C}_f . Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe \mathcal{C}_f , la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On admet que (T) est située au dessus de \mathcal{C}_f donc l'expression $(2x - 2 - f(x))$ est positive sur $]0; +\infty[$.

De ce fait, l'aire l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe \mathcal{C}_f , la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est donnée, en unités d'aire par : $\int_1^e (2x - 2 - f(x)) \, dx$.

La fonction $x \mapsto 2x - 2$ est continue sur $[1; e]$ donc elle admet des primitive de la forme $x \mapsto x^2 - 2x + k$. On a donc par linéarité :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e (2x - 2 - f(x)) \, dx \\ \mathcal{A} &= \int_1^e (2x - 2) \, dx - \int_1^e f(x) \, dx \\ &= [x^2 - 2x]_1^e - 2 \\ \mathcal{A} &= e^2 - 2e - (1^2 - 2) - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = e^2 - 2e - 1}$$

Bonus

Retrouver par le calcul l'équation de (T) et montrer (T) est située au dessus de \mathcal{C}_f .

∞ Fin du devoir ∞