Math93.com

# Devoir Surveillé n°6

# Terminale ES/L

## Intégrales et primitives

**Durée 1 heure - Coeff. 5**

**Noté sur 20 points**

---

*L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.*

## Exercice 1. Application du cours — 4 points

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$.
Déterminer la primitive de $f$ qui s'annule en 0.

**2.** Calculer : $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**3.** En déduire la valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;\,2]$.

## Exercice 2. — 5 points

Soit $g$ et $G$ définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = (\ln x)^2$$

**1.** Démontrer que $G$ est une primitive de $g$.

**2.** Trouver la primitive de $g$ qui s'annule pour $x = \mathrm{e}$.

**3.** Montrer que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

**4.** Calculer la valeur moyenne de $g$ sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

## Exercice 3. — 5 points

Soit $h$ et $H$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2} \quad \text{et} \quad H(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$$

**1.** Démontrer que $H$ est une primitive de $h$.

**2.** Calculer :

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$$

**3.** En déduire que la valeur de :

$$\int_0^1 \left(2 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

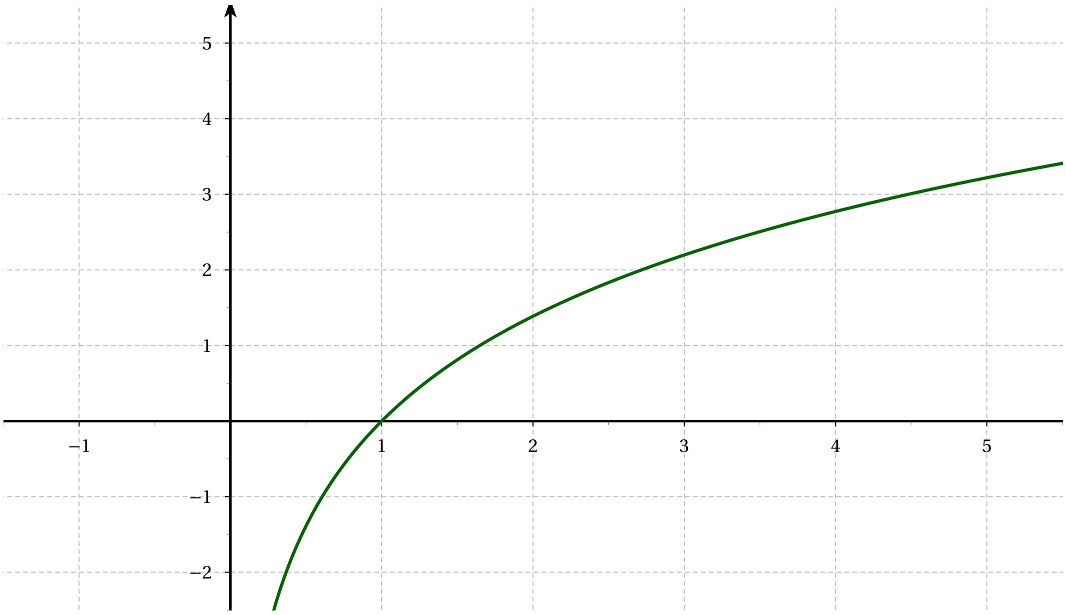
**Bonus**

Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \left(3 - 6t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

## Exercice 4. Un encadrement 6 points

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x$$




**1.** On donne la courbe de $f$ sur le graphique ci-dessus.
Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

**2.** Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.

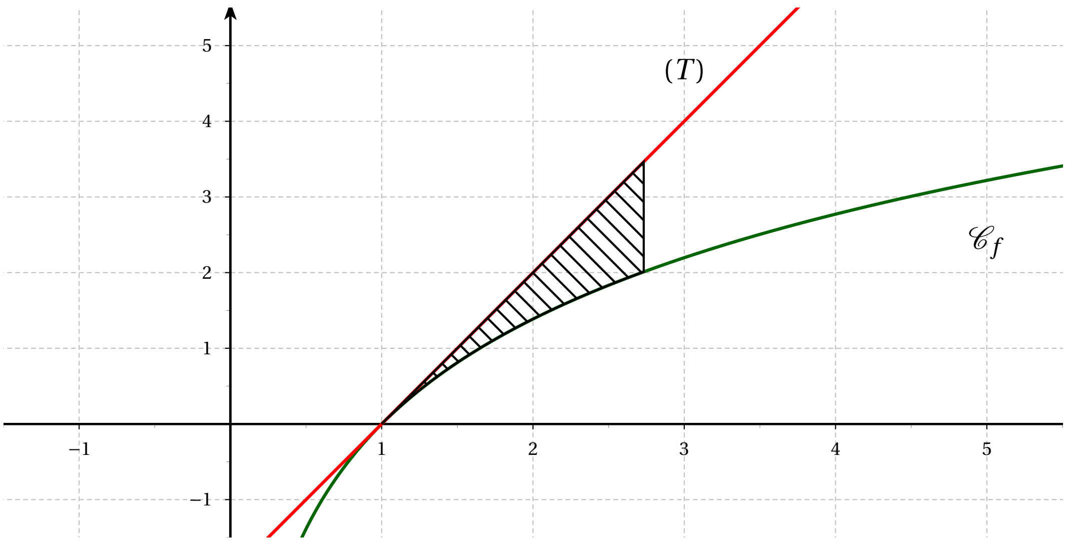
**3.** Montrer qu'une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est :

$$F(x) = 2x\ln x - 2x$$

**4.** Montrer que l'intégrale sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ de $f$ est :

$$\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x \,\mathrm{d}x = 2$$

**5.** On a tracé ci-dessous $(T)$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. La tangente $(T)$ est d'équation $y = 2x - 2$.
On admet que $(T)$ est située au dessus de $\mathscr{C}_f$. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente $(T)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.




**Bonus**
Retrouver par le calcul l'équation de $(T)$ et montrer $(T)$ est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

**Fin du devoir**